



# دفترچه پاسخ

## آزمون ۱۰ مهر ۱۴۰۵ اختصاصی دوازدهم ریاضی

### پدید آورندگان

| نام درس                      | نام طراحان                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ریاضی پایه و حسابان ۲        | کاظم اجلالی-میثم بهرامی-جویا-شاهین پروازی-سعید جعفری-حامد چوقادی-حسین حاجیلو-عادل حسینی-افشین خاصه خان طاهر دادستانی-یاسین سپهر-فرامرز سپهری-میلاد سجادی-لاریجانی-علی سلامت-علی اصغر شریفی-سعید علم پور-حمید علیزاده مرتضی فهیم علوی-سعید مدیر خراسانی-مهدی ملارمضانی-علیرضا نداف زاده-حمیدرضا نوش کاران-جهانبخش نیکنام                                                                                                                                   |
| هندسه و آمار و ریاضیات گسسته | امیرحسین ابومحجوب-معصومه اکبری-صحت-رضا پورحسینی-جواد حاتمی-عادل حسینی-خسرو خلعت بری-محمد خندان سیدوحید ذوالفقاری-یاسین سپهر-سیدامیر ستوده-شروین سیاح نیا-سیدمصطفی سیدحسینی-علیرضا شریف خطیبی محمدطاهر شعاعی-محمد صحت کار-رضا عباسی اصل-عزیزاله علی اصغری-فرشاد فرامرزی-مرتضی فهیم علوی کیان کریمی خراسانی-محمدابراهیم گیتی زاده-سینا محمدپور-محسن محمدکریمی-امیرحسین ملازینل-مهرداد ملوندی مختار منصوری-سروش موثینی-محمدعلی نادرپور-هومن نورائی-علی وزیری |
| فیزیک                        | حسین الهی-عبدالرضا امینی-نسب-زهره آقامحمدی-علی برزگر-محمدعلی راست-پیمان-پنهان رستمی-امیرمحمد عبدوی-مسعود قره خانی عبدالله قم زاده-مصطفی کیانی-علیرضا گونه حسین مخدومی-حسام نادری-شادمان ویسی                                                                                                                                                                                                                                                              |
| شیمی                         | جعفر یازوکی-محمد رضا پورچاوید-امیرحسین توحیدی-حمید ذبحی-منصور سلیمانی-ملکان-آروین شجاعی-ساجد شیری-آترین صبا مسعود طبر سا-مجتبی عبادی-محمد عظیمیان-زواره-امیر قاسمی-فاضل قهرمانی-فرد-محمد کوهستانیان-حسن لشکری-مجتبی محجوب محمد حسن محمدزاده-مقدم-سیدمحمد معروفی-سیدمحمد رضا میرقائمی-سیدرحیم هاشمی دهکردی                                                                                                                                                 |

### گروه علمی اختصاصی

| نام درس          | ریاضی پایه و حسابان ۲                                          | هندسه و آمار و ریاضیات گسسته                     | فیزیک                                            | شیمی                                                                 |
|------------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| گزینه گزینشگر    | سیدسپهر متولیان                                                | امیرحسین ملازینل                                 | حسین الهی                                        | مجتبی محجوب                                                          |
| گروه ویراستاری   | سینا صالحی<br>آرین غلامی<br>امیرحسین ابومحجوب<br>مهرداد ملوندی | آرین غلامی<br>امیرحسین ابومحجوب<br>مهرداد ملوندی | سینا صالحی<br>حسین بصیرتر کمپور<br>زهره آقامحمدی | مجید جلیل ناغونی<br>احسان پنجه شاهی<br>آترین صبا<br>ژیلوان محمدی پور |
| مسئول درس        | سیدسپهر متولیان                                                | امیرحسین ملازینل                                 | حسین الهی                                        | مجتبی محجوب                                                          |
| مستندسازی        | سمیه اسکندری                                                   | سجاد سلیمی                                       | ابراهیم نوری                                     | فاطمه الهی                                                           |
| ویراستاران مستند | سجاد سلیمی-معصومه صنعت کار-مهسا محمدنیا                        |                                                  |                                                  |                                                                      |

### گروه فنی و تولید اختصاصی

|                      |                                                           |
|----------------------|-----------------------------------------------------------|
| مدیر گروه            | مهرداد ملوندی                                             |
| مسئول دفترچه         | نرگس غنی زاده                                             |
| گروه مستندسازی       | مدیر گروه: مهیا اصغری<br>مسئول دفترچه: علیرضا همایون خواه |
| حروف نگار و صفحه آرا | فرزانه فتح اله زاده                                       |
| ناظر چاپ             | سوران نعیمی                                               |

### گروه آزمون

### بنیاد علمی آموزشی قلم چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳



حسابان ۱

گزینه ۱

(معدری ملارمضانی)

مجموع جمله‌های دوم و چهارم دنباله حسابی مورد نظر برابر است با:

$$a_2 + a_4 = \frac{-(-12)}{2} = 6$$

برای سه جمله هم فاصله  $a_2, a_3, a_4$  در دنباله حسابی، رابطه زیر برقرار است:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 3 \Rightarrow a_1 + 2d = 3 \quad (*)$$

نسبت مجموع شش جمله اول دنباله به جمله سوم آن برابر ۱۲ است، بنابراین:

$$\frac{S_6}{a_3} = 12 \Rightarrow S_6 = 12a_3 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 36 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 12 \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(**), (*)} d = 6, a_1 = -9$$

جمله یازدهم برابر است با:

$$a_{11} = a_1 + 10d = 51$$

(حسابان ۱- فیبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

گزینه ۲

(ظاهر دارستانی)

از تغییر متغیر  $t = x^2 - 2x$  استفاده می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = t \xrightarrow{\text{معادله}} t + 3 = \frac{54}{t} \times t \Rightarrow t^2 + 3t - 54 = 0$$

$$\Rightarrow (t+9)(t-6) = 0$$

$$\begin{cases} t = -9 \Rightarrow x^2 - 2x = -9 \Rightarrow x^2 - 2x + 9 = 0: \Delta < 0 \\ t = 6 \Rightarrow x^2 - 2x = 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 6 = 0: \Delta > 0 \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب‌های معادله، ریشه‌های مخرج (صفر و ۲) نیستند، بنابراین هر دو جواب قابل قبول‌اند.

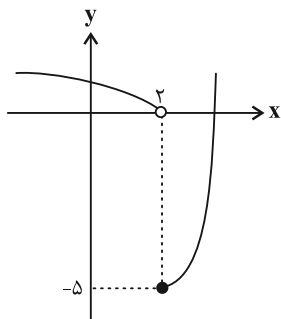
(حسابان ۱- فیبر و معادله: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

گزینه ۳

(افشین فاضل‌خان)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} - 1 & ; x < 2 \\ (x-2)^2 - 5 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

کافی است نمودار تابع را رسم کنیم:



نمودار تابع از ناحیه سوم عبور نمی‌کند.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۳۶ تا ۵۳)

گزینه ۴

(یاسین سپهر)

برای هر دو تابع وارون‌پذیر  $f$  و  $g$ ، رابطه  $g^{-1} \circ f^{-1} = (fog)^{-1}$  برقرار

است، پس  $f^{-1} \circ g^{-1} = (g^{-1} \circ f)^{-1}$  است و با توجه به فرض داریم:

$$\Rightarrow f^{-1}(g(2x-3)) = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{g(2x-3)}{3} + 2 = 2x \Rightarrow g(2x-3) = 6x - 6$$

حال برای به دست آوردن  $g(1)$ ، کافی است در رابطه بالا  $x = 2$  را

جای گذاری کنیم:

$$g(1) = 6(2) - 6 = 6$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

گزینه ۵

(میلاد سیاری لاریجانی)

با توجه به شکل، دو نقطه  $(3, 0)$  و  $(0, -\frac{26}{9})$  روی نمودار قرار دارند، پس داریم:

$$f(3) = 3^{3+a} + b = 0 \Rightarrow 27 \times 3^a = -b \Rightarrow 3^a = -\frac{b}{27} \quad (*)$$

$$f(0) = 3^a + b = -\frac{26}{9} \xrightarrow{(*)} -\frac{b}{27} + b = -\frac{26}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{26}{27}b = -\frac{26}{9} \Rightarrow b = -3$$

$$\xrightarrow{(*)} 3^a = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow a + b = -5$$

(حسابان ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۹)



$$= -\frac{\cos(4x+2x)}{\frac{1}{2}\sin(4x)} = -\frac{2\cos(6x)}{\sin(4x)}$$

$$\xrightarrow{x=18^\circ} A = -\frac{2\cos 108^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{2\cos 72^\circ}{\sin 72^\circ} = 2\cot 72^\circ$$

(مسئله ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

(سعید علم‌پور)

گزینه «۴» -۹

با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - x^2) = a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+b} - 1 = \sqrt{1+b} - 1 = 1 \\ \Rightarrow \sqrt{1+b} = 2 \Rightarrow 1+b = 4 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{2b}{a}\right) = f(6) = \sqrt{6+3} - 1 = 2$$

(مسئله ۱- مر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۹)

(مرتضی فعیم‌علوی)

گزینه «۴» -۱۰

برای پیوسته بودن تابع  $f$  در  $x=1$ ، باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a[2-3 \times 1^-] = \lim_{x \rightarrow 1^-} a[-1^+] = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|(x-1)(x-2)|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{-(x-2)} = 2$$

$$\Rightarrow -a = b = 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow b - 2a = 6$$

(مسئله ۱- مر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

(شاهین پروازی)

گزینه «۲» -۶

می‌دانیم  $\log_4(x+2) = \log_2|x+2|$  است و با توجه به دامنه معادله

$(x > 0)$ ، تساوی  $\log_2|x+2| = \log_2(x+2)$  برقرار است. پس داریم:

$$\log_2 x + \log_2(x+2) = 3 \Rightarrow \log_2 x(x+2) = 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 8 \xrightarrow{+1} x^2 + 2x + 1 = 9$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 9 \Rightarrow x = -1 \pm 3 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

بنابراین  $a = 2$  جواب معادله است و داریم:  $\log_{81}(a+1) = \log_{81}3 = \frac{1}{4}$

(مسئله ۱- توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۸۶ تا ۸۸)

(میثم بهرامی‌پور)

گزینه «۳» -۷

$$\cot 82^\circ = \cot(72^\circ + 10^\circ) = \cot 10^\circ = \cot(90^\circ - 80^\circ) = -\tan 80^\circ$$

$$\sin 51^\circ = \sin(36^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 76^\circ = \tan(72^\circ + 4^\circ) = \tan 4^\circ = 1$$

$$\cot 35^\circ = \cot(36^\circ - 1^\circ) = -\cot 1^\circ$$

$$A = \frac{-\tan 10^\circ + 2 \times \frac{1}{2}}{1 - \cot 10^\circ} = \frac{-a + 1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{-(a-1)}{\frac{a-1}{a}} = -a$$

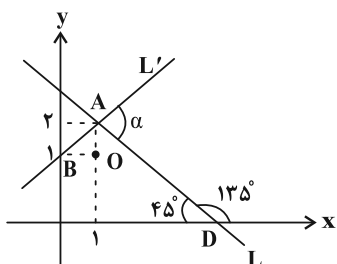
(مسئله ۱- مثلثات: صفحه ۱۰۱)

(مرتضی فعیم‌علوی)

گزینه «۱» -۸

با ساده کردن کسر داده شده داریم:

$$A = \frac{\sin 4x}{\cos 2x} - \frac{\cos 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x \sin 2x - \cos 4x \cos 2x}{\sin 2x \cos 2x}$$



مثلث  $AOB$ ، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس  $\widehat{BAO} = 45^\circ$

است. همچنین  $\widehat{OAD} = 45^\circ$  است، پس داریم:

$$\alpha = 180^\circ - (\widehat{BAO} + \widehat{OAD}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۱۴- گزینه «۴»

(یاسین سپهر)

$$x^3 = 9\sqrt[3]{16\sqrt{16}} = 9\sqrt[3]{64} = 9 \times 4 = 36$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۵- گزینه «۱»

(یاسین سپهر)

باید معادله تقاطع دو نمودار یک جواب داشته باشد:

$$2x^2 + 5x + 6 = -3x + k \Rightarrow 2x^2 + 8x + 6 - k = 0$$

$\Delta$  ی معادله بالا باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta = 8^2 - 4(6 - k) = 0 \Rightarrow k = -2$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۷)

۱۶- گزینه «۱»

(شمیر علیزاده)

نامعادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{x+a}{x} - \frac{x-2}{x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + (a+2)x + 2a - x^2 - 2x}{x(x+2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a+4)x + 2a}{x(x+2)} \leq 0$$

ریاضی ۱

۱۱- گزینه «۳»

(سعید مدیرفراسانی)

دسته‌بندی مورد نظر به صورت مقابل است:  $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$   
شماره عدد آخر دسته  $n$ ام از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین اعداد دسته ۲۱ از عدد فرد با شماره ۲۱۱  $\frac{20 \times 21}{2} + 1 = 211$  شروع

شده و تا شماره ۲۳۱  $\frac{21 \times 22}{2} = 231$  ادامه دارند، پس:

$$\text{شماره جمله وسط} = \frac{211 + 231}{2} = 221$$

$$\Rightarrow a_{221} = 2(221) - 1 = 441$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۰)

۱۲- گزینه «۲»

(شاهین پروازی)

با توجه به شکل، مختصات  $A$  به صورت  $(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$  است و با دوران  $135^\circ$  درجه در جهت دایره مثلثاتی به نقطه  $B(\cos 180^\circ, \sin 180^\circ)$  می‌رسیم:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B(-1, 0)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$OA = OB = 1$$

$$\Rightarrow P_{OAB} = 1 + 1 + \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱۳- گزینه «۴»

(فرامرز سپهری)

$x = 1$  را در معادله خط  $L$  جایگذاری می‌کنیم، عرض نقطه برخورد دو

خط برابر  $y = 2$  به دست می‌آید. همچنین شیب  $L$  برابر  $-1$  است،

بنابراین با قسمت مثبت محور  $x$  زاویه  $135^\circ$  می‌سازد:

دقت کنید که به ازای  $m = -1$ ، دو زوج مرتب  $(2, -3)$  و  $(2, 1)$  عضو

مجموعه خواهند شد، که در آن صورت  $f$  نمی‌تواند تابع باشد. پس تابع  $f$  به

صورت زیر است:

$$f = \{(-6, 1), (2, 5), (7, 1)\}$$

برد تابع  $f$ ،  $\mathbb{R}_f = \{1, 5\}$  است و دو عضو دارد.

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۸)

۱۹- گزینه «۴» (مرتضی فقیه‌علوی)

دو حالت برای ایجاد چنین رمزی وجود دارد:

(الف)

$$\frac{26}{\text{حرف}} \times \frac{10}{\text{رقم}} \times \frac{26}{\text{حرف}} \times \frac{10}{\text{رقم}} = 67600$$

(ب)

$$\frac{10}{\text{رقم}} \times \frac{26}{\text{حرف}} \times \frac{10}{\text{رقم}} \times \frac{26}{\text{حرف}} = 67600$$

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد رمزهای قابل تولید برابر است با:

$$2 \times 67600 = 135200$$

(ریاضی ۱- شمارش برون شمردن: مشابه مثال صفحه ۱۲۲)

۲۰- گزینه «۴» (مسیر شاپیو)

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی از ۹ عضو: فضای نمونه} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{5! \times 4!} = 126$$

$$= \binom{6}{2} = 15 \quad \text{تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی شامل ۲ و ۳ ولی فاقد ۴: پیشامدها}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال مطلوب} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۱)

با توجه به مجموعه جواب  $[-2, -\frac{2}{3}] - (-\infty, b)$  مشخص می‌شود که

$x = -\frac{2}{3}$  ریشه عبارت صورت است، از طرفی  $x = -2$  و  $x = 0$  نیز

$$\begin{cases} b = 0 \\ -\frac{2a}{a+4} = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a - b = 2 \end{cases} \quad \text{پس: ریشه‌های مخرج هستند.}$$

(ریاضی ۱- معادله‌ها و نامعادله‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱)

۱۷- گزینه «۲» (عارل حسینی)

ضابطه تابع همانی  $f$  به صورت  $f(x) = x$  است و ضابطه تابع ثابت  $g$  را به

صورت  $g(x) = k$  در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{2f(g(1)) - g(f(0))}{f(1) + 2g(-1)} = \frac{2f(k) - g(0)}{1 + 2k} = \frac{2k - k}{1 + 2k} = \frac{k}{1 + 2k} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 5k = 2 + 4k \Rightarrow k = 2$$

پس تابع ثابت  $g$  به صورت  $g(x) = 2$  است و داریم:

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۱۸- گزینه «۲» (عمیدرضا نوش‌گلران)

برای اینکه رابطه داده شده یک تابع باشد، باید  $2m - 1$  و  $m^2 - 4$  برابر

باشند: (زیرا مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی هستند که مؤلفه‌های اول برابر دارند).

$$m^2 - 4 = 2m - 1 \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \text{ غقی} \end{cases}$$



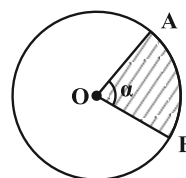
هندسه ۲

۲۱- گزینه «۴»

(معمدر فندان)

اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره  $C(O, R)$  بر حسب درجه مساوی  $\alpha$  باشد، طول کمان  $AB$  برابر  $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$  و مساحت قطاع برابر

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \text{ است.}$$



بنابراین با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} S = \frac{\pi R^2 \times 90^\circ}{360^\circ} \\ S' = \frac{\pi R'^2 \times 15^\circ}{360^\circ} \end{cases} \xrightarrow{S=S'} R^2 \times 90^\circ = R'^2 \times 15^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{R'^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

حال نسبت طول کمان  $AB$  به  $A'B'$  را به دست می آوریم:

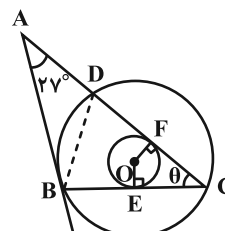
$$\frac{L_{AB}}{L_{A'B'}} = \frac{\frac{\pi R^2 \times 90^\circ}{180^\circ}}{\frac{\pi R'^2 \times 15^\circ}{180^\circ}} = \frac{R^2}{R'^2} \times 6 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times 6 = \sqrt{6}$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه ۱۲)

۲۲- گزینه «۳»

(معمدر ظاهر شعاعی)

می دانیم اگر فاصله مرکز دایره از دو وتر برابر باشد، آن گاه آن دو وتر مساوی یکدیگرند.



$$OE = OF \Rightarrow BC = DC$$

$$\Delta BDC \Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BDC} = \frac{180^\circ - \theta}{2}$$

$$\Delta ABD: \left. \begin{array}{l} \widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{ABD} \\ \widehat{ABD} = \widehat{ABD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{180^\circ - \theta}{2} = 27^\circ + \frac{\widehat{BD}}{2}$$

$$\text{از طرفی } \widehat{BCD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ (زاویه محاطی). پس } \theta = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ بوده و در نتیجه:}$$

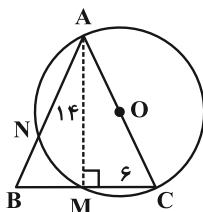
$$90^\circ - \frac{\theta}{2} = 27^\circ + \theta \Rightarrow \frac{2\theta}{2} = 63^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2 \times 63^\circ}{2} = 2 \times 21^\circ = 42^\circ$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه های ۱۳ و ۱۷)

۲۳- گزینه «۳»

(مفسر معمدر کریمی)



پاره خط  $AM$  را رسم می کنیم. چون زاویه  $AMC$  محاطی روبه رو به قطر است، قائمه می باشد و چون در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نظیر قاعده است، پس  $BM = MC = 6$  می باشد. حالا بنا بر روابط طولی در دایره داریم:

$$BM \times BC = BN \times BA \Rightarrow 6 \times 12 = x \times (x + 14)$$

$$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow \text{طول ساق} = 18$$

(هندسه ۲- دایره؛ صفحه های ۱۸ و ۱۹)

۲۴- گزینه «۱»

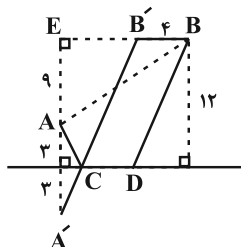
(رضا عباسی اصل)

طول مماس های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند، بنابراین داریم:

۲۶- گزینه «۴»

(معصومه اکبری صمدت)

ابتدا نقطه A را نسبت به رودخانه بازتاب می‌دهیم تا نقطه A' به دست آید. سپس نقطه B را به اندازه ۴ کیلومتر (برابر طول CD) موازی با CD به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نقطه B' حاصل شود.



چهارضلعی B'BDC متوازی الاضلاع است، پس B'C = BD است. طبق

مسئله هرون برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین A و B' داریم:

$$\Delta AEB: BE^2 = AB^2 - AE^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow BE = 12$$

$$B'E = BE - BB' = 12 - 4 = 8$$

$$\Delta A'EB': A'B'^2 = A'E^2 + B'E^2 = 15^2 + 8^2 = 289$$

$$\Rightarrow A'B' = 17$$

$$\Rightarrow A'C + CB' = 17 \Rightarrow AC + BD = 17$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین جاده} = AC + CD + BD = 17 + 4 = 21$$

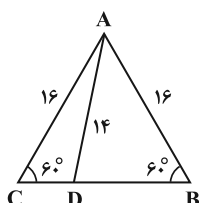
(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه ۵۳)

۲۷- گزینه «۱»

(امیرحسین ملازینل)

مطابق شکل فرض می‌کنیم ضلع AC به نقطه D نزدیک‌تر است. با توجه

به قضیه کسینوس‌ها اندازه پاره‌خط‌های BD و CD مشخص می‌شود.



$$\begin{cases} BE = BD = 5 \\ CD = CF = 3 \Rightarrow AF = \underbrace{AC}_{17} + \underbrace{CF}_3 = 20 \\ AE = AF \end{cases}$$

$$\Rightarrow AE = 20 \Rightarrow AB + \underbrace{BE}_5 = 20 \Rightarrow AB = 15$$

در نتیجه مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا داریم:

$$17^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

در صورتی که S و p به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث ABC باشند،

شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$p = \frac{17 + 15 + 8}{2} = 20$$

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$$

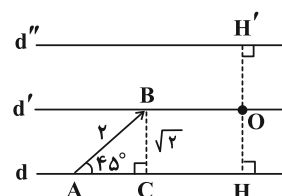
$$r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{60}{20 - 8} = \frac{60}{12} = 5$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۹، ۲۰، ۲۵ و ۲۶)

۲۵- گزینه «۳»

(مهم‌ترین)

مطابق شکل خط d را با بردار AB بر خط d' تصویر می‌کنیم.



در مثلث قائم‌الزاویه ABC، ضلع BC روبه‌رو به زاویه ۴۵ درجه است،

$$\text{پس } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ وتر است، پس } BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}. \text{ از طرفی خط } d \text{ را با}$$

دوران ۱۸۰ درجه به مرکز O بر خط d'' تصویر کرده‌ایم. چون دوران

تبدیلی طولیاست، پس  $OH = OH' = \sqrt{2}$  و فاصله دو خط d و d''

$$\text{برابر } HH' = 2OH = 2\sqrt{2} \text{ است.}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۳)

حال با توجه به این که  $MP$  و  $MQ$  نیمساز زوایای داخلی در دو مثلث  $AMB$  و  $AMC$  هستند، می توان نوشت:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{M}_4 = 180^\circ \quad \frac{\hat{M}_1 = \hat{M}_2}{\hat{M}_3 = \hat{M}_4} \rightarrow \hat{M}_2 + \hat{M}_3 = 90^\circ$$

پس مثلث  $PMQ$  قائم الزویه است و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$MP^2 + MQ^2 = PQ^2 = 4 / 8^2 = 32 / 0.4$$

(هنر سه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه های ۶۸ تا ۷۰)

(عادل حسینی)

۲۹- گزینه «۱»

با استفاده از قضیه هرون، مساحت مثلث  $ABC$  را به دست می آوریم:

$$S_{ABC} = \sqrt{14(14-13)(14-8)(14-7)} = 14\sqrt{3}$$

از طرفی می دانیم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{13} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{42\sqrt{3}}{13}$$

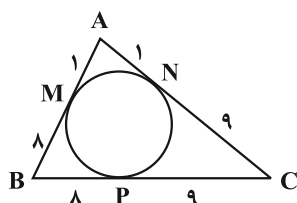
(هنر سه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه های ۷۱ و ۷۲)

(مهرداد ملونری)

۳۰- گزینه «۲»

می دانیم طول دو مماس رسم شده از هر نقطه خارج دایره بر آن، با هم برابر

هستند، پس مطابق شکل داریم:



یعنی طول اضلاع مثلث  $ABC$  برابر ۹، ۱۰ و ۱۷ است.

با معلوم بودن طول سه ضلع مثلث، ابتدا مساحت را با قاعده هرون به دست

آورده و سپس شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه می کنیم:

$$p = \frac{9+10+17}{2} = 18 \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{18 \times 1 \times 8 \times 9} = 36 \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{36}{18} = 2$$

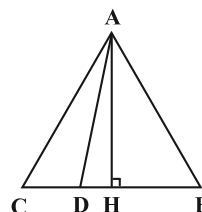
(هنر سه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه های ۷۱ و ۷۲)

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 196 = 256 + BD^2 - 2 \times 16 \times BD \times \frac{1}{2} \Rightarrow BD^2 - 16BD + 60 = 0$$

$$\Rightarrow (BD-6)(BD-10) = 0 \xrightarrow{BD > CD} \begin{cases} BD = 10 \\ CD = 6 \end{cases}$$

حال با نوشتن نسبت مساحت در مثلث های  $ADB$  و  $ADC$  داریم:

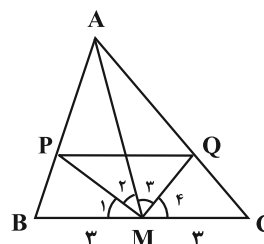


$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AH}{\frac{1}{2}CD \times AH} = \frac{BD}{CD} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

(هنر سه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه های ۶۳ تا ۶۷)

(مهمرب قناران)

۲۸- گزینه «۲»



با توجه به قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در دو مثلث  $AMB$  و  $AMC$  داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta AMB: \frac{AP}{BP} &= \frac{AM}{BM} = \frac{12}{3} = 4 \quad (*) \\ \Delta AMC: \frac{AQ}{QC} &= \frac{AM}{CM} = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC}$$

بنابراین با توجه به عکس قضیه تالس نتیجه می گیریم که  $PQ \parallel BC$  است.

در نتیجه داریم:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AP+BP} \stackrel{(*)}{=} \frac{AM}{AM+BM} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{4}{5}BC = \frac{4}{5} \times 6 = 4.8$$



$$\left. \begin{aligned} \Delta AMC : EF \parallel AM &\Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{CE}{CM} \\ \Delta BDE : AM \parallel DE &\Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{BE}{CM} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{CE+BE}{CM} = \frac{BC}{CM}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{2CM}{CM} = 2 \Rightarrow \frac{4}{5} + \frac{DE}{AM} = 2$$

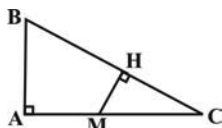
$$\Rightarrow \frac{DE}{AM} = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

(معمری نادرپور)

۳۴- گزینه «۲»

چون M وسط AC است پس  $AC = 2MC$  است.



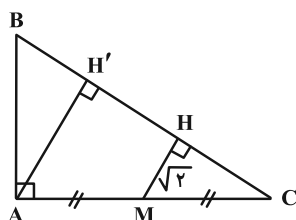
$$\Delta ABC \sim \Delta MHC \Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{MH}{AB} = \frac{HC}{AC}$$

$$\frac{HC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{HC}{2MC} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow HC = \frac{2\sqrt{2}}{3} MC$$

$$MC^2 = MH^2 + HC^2 = 2 + \frac{1}{9} MC^2 \Rightarrow MC^2 = 18$$

$$\Rightarrow MC = 3\sqrt{2} \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$$

راه دوم: از رأس A بر وتر BC عمود  $AH'$  را رسم می‌کنیم:



$$MH \parallel AH' \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{MH}{AH'} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH' = 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BH' = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

حالا طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AH'^2 = BH' \cdot CH' \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 = 1 \times CH' \Rightarrow CH' = 8$$

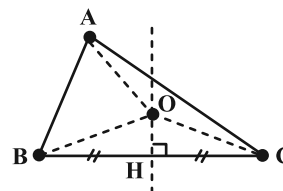
$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

هندسه ۱

۳۱- گزینه «۳»

(امیرحسین ملازینل)



می‌دانیم نقطه تلاقی سه عمودمنصف، روی عمودمنصف ضلع BC واقع است. همچنین می‌دانیم این نقطه تلاقی (آن را O بنامید)، از سه رأس به یک فاصله است ( $OA = OB = OC$ ). با توجه به شکل واضح است طول OB (و در نتیجه OA) وقتی کمینه می‌شود که O روی H بیفتد که

$$\text{در این حالت } OA = OB = \frac{BC}{2} = 3 \text{ می‌شود.}$$

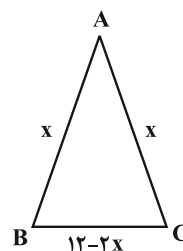
توجه: در این حالت مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه خواهد بود.

(هنر سه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۳۲- گزینه «۲»

(رضا عباسی اصل)

فرض کنیم طول ساق مثلث برابر x باشد. در این صورت طول قاعده مثلث برابر با  $12 - 2x$  خواهد بود.



حال بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم:

$$\left. \begin{aligned} x + x > 12 - 2x &\Rightarrow 4x > 12 \Rightarrow x > 3 \\ x + (12 - 2x) > x &\Rightarrow 2x < 12 \Rightarrow x < 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 < x < 6$$

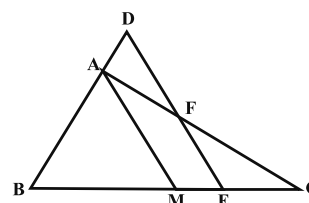
بنابراین تنها مقادیر صحیح ممکن برای x، برابر ۴ و ۵ هستند.

(هنر سه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال؛ صفحه‌های ۱۱ و ۲۷)

۳۳- گزینه «۴»

(مهم‌ظاهر شعاعی)

طبق فرض  $BM = CM$  است. به کمک قضیه تالس داریم:



۳۵- گزینه «۴»

(امیرحسین ابومحبوب)

مطابق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB^2 = BC \times BH = 10 \times 8 = 80 \Rightarrow AB = 4\sqrt{5}$$

$$AC^2 = BC \times CH = 10 \times 2 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$

$$DH \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{DH}{AB} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{DH}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$EH \parallel AC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{EH}{AC} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{EH}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{10}$$

$$\Rightarrow EH = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$S_{ADHE} = DH \times EH = \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{5} = \frac{32}{5} = 6 \frac{2}{5}$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۴۱ تا ۴۴)

۳۶- گزینه «۱»

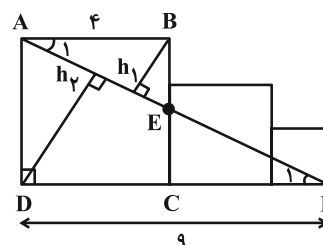
(شروین سیاح‌نیا)

مثلث‌های ABE و ADF به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DF \\ \angle ABE = \angle ADF \\ \angle BAE = \angle DAF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADF$$

می‌دانیم که نسبت ارتفاع‌های متناظر در دو مثلث متشابه برابر با نسبت تشابه

است، پس:



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{DF} = \frac{4}{9}$$

(هنرسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

۳۷- گزینه «۲»

(سینا ممدپور)

در هر n ضلعی تعداد قطرهای برابر  $\frac{n(n-3)}{2}$  است. بنابراین:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow n-3=2 \Rightarrow n=5$$

مجموع اندازه زاویه‌های خارجی هر n ضلعی برابر  $360^\circ$  و مجموع اندازه

زاویه‌های داخلی هر n ضلعی برابر  $(n-2)180^\circ$  است. پس:

$$180^\circ(5-2) = 180^\circ \times 3 = 540^\circ \Rightarrow 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$$

(هنرسه ۱- پندر ضلعی‌ها؛ صفحه ۵۵)

۳۸- گزینه «۳»

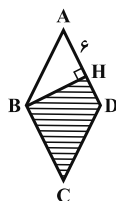
(مهردار ملونری)

با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow BH = 8$$

پس مساحت ناحیه هاشورخورده برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{BHDC} &= S_{ABCD} - S_{ABH} \\ &= AD \times BH - \frac{AH \times BH}{2} \\ &= 10 \times 8 - \frac{6 \times 8}{2} = 80 - 24 = 56 \end{aligned}$$



(هنرسه ۱- پندر ضلعی‌ها؛ صفحه ۶۵)

۳۹- گزینه «۱»

(ممدابراهیم کیتی‌زاده)

می‌دانیم اگر خطی با یکی از دو صفحه موازی، متقاطع باشد، حتماً با دیگری نیز متقاطع است. پس هر صفحه موازی با صفحه P، دو خط d و d' را قطع می‌کند.

(هنرسه ۱- تقسیم فضایی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۴۰- گزینه «۲»

(غرشاد خرامرزی)

مکعب بزرگ از  $4 \times 4 \times 3 = 48$  مکعب کوچک تشکیل شده است. حداکثر مکعب‌هایی که می‌توانند برداشته شوند برابر است با:  $48 - 7 = 41$  که در این صورت تنها یک ردیف به شکل B باقی می‌ماند.

همچنین حداقل باید  $5 \times 4 = 20$  مکعب از شکل برداشته شود (۵ ستون مکعب از بالا به پایین که هر کدام شامل ۴ مکعب هستند). در نتیجه تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شوند، برابر است با:

$$41 - 20 = 21$$

(هنرسه ۱- تقسیم فضایی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

آمار و احتمال

گزینه ۴»

(یاسین سپهر)

اگر ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$  را به ترکیب فصلی تبدیل کنیم، آنگاه داریم:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

با توجه به هم‌ارزی منطقی به دست آمده داریم:

$$\sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim p] \equiv (\sim p \wedge q) \wedge \underbrace{\sim(\sim p)}_p$$

$$\equiv (\underbrace{\sim p \wedge p}_F) \wedge q \equiv F$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۴ تا ۹)

گزینه ۲»

(امیرحسین ابومصوب)

گزینه «۱»: نامساوی  $2^n < n^2$  به ازای  $n = 3$  برقرار است، یعنی داریم:

$$2^3 < 3^2$$

گزینه «۲»:

$$n^2 < 9n - 20 \Rightarrow n^2 - 9n + 20 < 0 \Rightarrow (n - 4)(n - 5) < 0$$

$$\Rightarrow 4 < n < 5$$

بنابراین نامساوی به ازای هیچ مقدار حسابی برای  $n$  برقرار نیست، پس

مجموعه جواب گزاره‌نما تهی است.

گزینه «۳»: نامساوی به ازای  $n = 2$  برقرار است، یعنی داریم:

$$2! = 2 < 2^2 = 4$$

گزینه «۴»:

$$2n^2 < 5 - 3n \Rightarrow 2n^2 + 3n - 5 < 0 \Rightarrow (n - 1)(2n + 5) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2} < n < 1 \Rightarrow n = 0 \text{ به ازای } n \text{ برقرار است.}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات، صفحه‌های ۳ و ۴)

گزینه ۱»

(سیدمیر زوالفقاری)

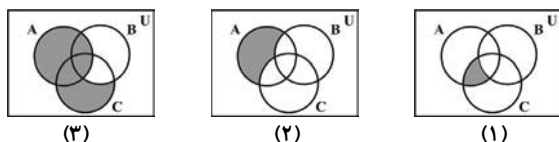
به وضوح می‌توان مشاهده کرد که مجموعه تهی ( $\emptyset$ ) عضوی از مجموعه  $A$  می‌باشد، پس گزینه «۲» صحیح است. ۱ و  $\{2\}$  عضو  $A$  هستند، پس  $\{1, 2\}$  زیرمجموعه  $A$  می‌باشد و گزینه «۳» نیز صحیح است. می‌دانیم تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌ها است، پس گزینه «۴» نیز صحیح می‌باشد. ولی به وضوح می‌توان دید که  $\{1, \{2\}\}$  عضو مجموعه  $A$  نیست و در نتیجه گزینه «۱» صحیح نمی‌باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰)

گزینه ۴»

(علیرضا شریف‌فطیعی)

نمودار ون هر یک از گزینه‌های دیگر به صورت زیر است:



(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۱ تا ۳۰)

گزینه ۲»

(علیرضا شریف‌فطیعی)

اگر پیشامدهای همراه داشتن کارت اعتباری نوع  $A$  و نوع  $B$  را به ترتیب با  $A$  و  $B$  نمایش دهیم، آنگاه پیشامد همراه داشتن فقط یکی از دو نوع کارت به صورت  $(A - B) \cup (B - A)$  است. با توجه به این که دو پیشامد  $(A - B)$  و  $(B - A)$  ناسازگارند، داریم:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = 0/32$$

$$\Rightarrow 0/38 + 0/48 - 2P(A \cap B) = 0/32$$

$$\Rightarrow 2P(A \cap B) = 0/54 \Rightarrow P(A \cap B) = 0/27$$

پیشامد این که مشتریان فقط کارت  $B$  را در اختیار داشته باشند

برابر  $B - A$  بوده و احتمال آن برابر است با:

$$P(B - A) = \underbrace{P(B)}_{0/48} - \underbrace{P(A \cap B)}_{0/27} = 0/21$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۴۶- گزینه «۱»

(مرتضی فعیم علوی)

اگر بدانیم که کارت با شماره ۶ خارج شده است، برای این که جمع شماره سه کارت برابر ۱۹ بشود، باید جمع شماره دو کارت خروجی دیگر برابر  $19 - 6 = 13$  بشود. تعداد کل حالات برابر است با تعداد راه‌های

$$n(S) = \binom{4}{2} = 6 \quad \text{انتخاب ۲ کارت از میان ۴ کارت، یعنی:}$$

حالت‌های مطلوب عبارتند از  $\{4, 6, 9\}$  و  $\{5, 6, 8\}$ ، یعنی  $n(A) = 2$  و

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۴۷- گزینه «۳»

(عزیزاله علی‌اصغری)

از آنجا که پیشامدهای A و B مستقل هستند، پیشامدهای A' و B' نیز مستقل می‌شوند و طبق فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(B - A) + P(A' \cap B') &= P(B \cap A') + P(B' \cap A') \\ &= P(B)P(A') + P(B')P(A') = (P(B) + P(B'))P(A') \\ &= P(A') = 0/5 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - 0/5 = 0/5 \\ P(B')P(A') = 0/3 \Rightarrow P(B') = 0/6 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین خواسته سوال برابر است با:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = 0/5 \times 0/6 = 0/3$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۸)

۴۸- گزینه «۲»

(کیان کریمی فراهانی)

بزرگ‌ترین زاویه مرکزی، مربوط به داده با فراوانی  $2x + 1$  یا با فراوانی ۶ است. پس داریم:

حالت اول: بیش‌ترین فراوانی برابر  $2x + 1$  باشد.

$$\frac{2x + 1}{4x + 7} = \frac{144}{360} = \frac{2}{5} \Rightarrow 10x + 5 = 8x + 14 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

که قابل قبول نیست زیرا فراوانی‌ها اعدادی طبیعی‌اند.

حالت دوم: بیش‌ترین فراوانی برابر ۶ باشد.

$$\frac{6}{4x + 7} = \frac{2}{5} \Rightarrow 30 = 8x + 14 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین مجموع فراوانی‌ها برابر ۱۵ است و داریم:

$$3 \text{ فراوانی نسبی داده } 3 = \frac{2x - 3}{4x + 7} = \frac{1}{15}$$

$$5 \text{ فراوانی نسبی داده } 5 = \frac{2}{15}$$

اختلاف فراوانی‌های نسبی دو داده، برابر  $\frac{1}{15}$  است.

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۴۹- گزینه «۴»

(سروش موئینی)

واریانس داده‌ها برابر  $16 = 4^2$  (مجذور انحراف معیار) بوده و داریم:

$$\sigma^2 = 16 = \frac{\sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2}{30} \Rightarrow \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 480$$

$$\sigma^2 = 10 = \frac{\sum_{i=1}^{30+n} (x_i - \bar{x})^2}{30+n} \Rightarrow \frac{480}{30+n} = 10 \Rightarrow n = 18$$

دقت کنید که برای داده‌های مساوی با میانگین،  $x_i - \bar{x} = 0$  است و حاصل

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 \text{ تغییری نمی‌کند.}$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۵۰- گزینه «۱»

(سیروید زوالفقاری)

انحراف معیار برآورد میانگین برابر انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازه نمونه است، بنابراین داریم:

$$\sigma_{\bar{x}} \leq 8 \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8 \xrightarrow{\sigma=16} \frac{16}{\sqrt{n}} \leq 8 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 2 \Rightarrow n \geq 4$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه ۱۱۵)



فیزیک ۲

۵۱- گزینه «۳»

(مسئله مفرومی)

با بسته و باز کردن کلید  $k_1$  بار کره‌های  $A$  و  $B$  برابر می‌شوند:

$$q'_A = q'_B = \frac{q_A + q_B}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \mu C$$

با بسته و باز کردن کلید  $k_2$ ، تمام بار کره  $B$  به پوسته خارجی  $C$  منتقل شده و با بسته و باز کردن کلید  $k_3$ ، این بار به پوسته خارجی  $D$  منتقل می‌گردد. پس:

$$q_A = 2 \mu C, q_B = 0, q_C = 0, q_D = 2 \mu C$$

(فیزیک ۲- الکتروسیستة ساکن: صفحه‌های ۳، ۵، ۲۷ و ۲۸)

۵۲- گزینه «۲»

(بهنام رستمی)

عبارت‌های «الف» و «ت» صحیح هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

(ب) در میدان الکتریکی یکنواخت، با حرکت در جهت عمود بر خطوط میدان، پتانسیل الکتریکی تغییر نمی‌کند.

(پ) استفاده از هر نوع ماده‌ای الکتریکی بین صفحه‌های خازن (قطبی و غیرقطبی) باعث افزایش ظرفیت خازن می‌شود.

(فیزیک ۲- الکتروسیستة ساکن: صفحه‌های ۱۹، ۲۸ و ۲۳ تا ۲۶ و ۳۴ تا ۳۶)

۵۳- گزینه «۴»

(مسئله الهی)

در جابه‌جایی ذره از نقطه (۱) تا (۲) تنها نیرویی که به آن وارد می‌شود، نیروی الکتریکی است. طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_E = \Delta K$$

از طرف دیگر بنابه تعریف  $W_E = -\Delta U$  است و نیز  $\Delta U = q\Delta V$

$$\Delta K = W_E = -\Delta U = -q\Delta V$$

می‌باشد. بنابراین داریم:

$$K_2 - K_1 = -q(V_2 - V_1) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = -q(V_- - V_+)$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-27} \times v^2 = -1/6 \times 10^{-19} \times -2500$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{25 \times 10^{-17}}{10^{-27}}$$

$$v^2 = 25 \times 10^{10} \Rightarrow v = 5 \times 10^5 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۲- الکتروسیستة ساکن: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴)

۵۴- گزینه «۱»

(مصطفی کیانی)

بررسی موارد:

(الف) نادرست؛ مقاومت جسم در دمای ثابت به طول، مساحت مقطع و جنس آن بستگی دارد.

(ب) درست

(پ) نادرست؛ مقاومت نوری (LDR)، نوعی مقاومت است که مقاومت الکتریکی آن به نور تابیده شده به آن بستگی دارد.

(ت) نادرست؛ از LDR ها می‌توان در تجهیزات چشم الکترونیکی، دزدگیرها، کنترل‌کننده‌های خودکار و چراغ‌های روشنایی خیابان استفاده کرد.

(ث) درست

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۵۲ و ۵۶ تا ۶۰)

۵۵- گزینه «۳»

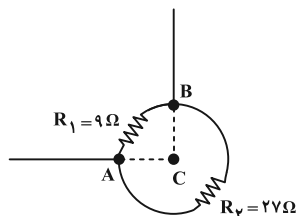
(مصطفی کیانی)

چون سیم را به صورت حلقه بین دو نقطه  $A$  و  $B$  قرار داده‌ایم، به دو مقاومت موازی تبدیل می‌شود که مقاومت قسمت کوچکتر آن  $R_1 = 9 \Omega$  و

$$R_1 = \frac{90}{360} \times 36 = 9 \Omega$$

$$\text{مقاومت قسمت بزرگتر آن } R_2 = \frac{270}{360} \times 36 = 27 \Omega \text{ است. در این حالت}$$

مقاومت معادل مدار برابر است با:



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{9 \times 27}{9 + 27} \Rightarrow R_{eq} = 6.75 \Omega$$

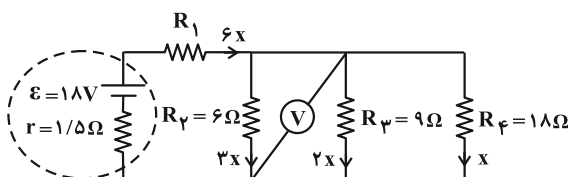
اکنون می‌توان نیروی محرکه باتری را به دست آورد:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \Rightarrow 2 = \frac{\mathcal{E}}{6.75 + 1/25} \Rightarrow \mathcal{E} = 16V$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۵۲، ۵۶ و ۶۱ تا ۷۷)

۵۶- گزینه «۱»

(زهره آقاممیری)



مقاومت‌های  $R_2$ ،  $R_3$  و  $R_4$  موازی‌اند، پس اختلاف پتانسیل یکسانی دارند.

در نتیجه اگر جریان عبوری از مقاومت  $R_4$  را  $x$  بگیریم، جریان‌های عبوری

از مقاومت‌های  $R_3$  و  $R_2$  به ترتیب  $2x$  و  $3x$  و  $6x$  خواهد شد. از

طرفی طبق گفته سوال، توان مصرفی مقاومت‌های  $R_2$  و  $R_1$  برابر است و

خواهیم داشت:

$$P = RI^2 \xrightarrow{P_1 = P_2} R_1 (6x)^2 = 6 \times (3x)^2 \Rightarrow R_1 = 1/5 \Omega$$

(شارمان ویسی)

۵۹- گزینه «۴»

در حالت اول چون سطح حلقه بر خط‌های میدان مغناطیسی عمود است:

$$\theta_1 = 0 \Rightarrow \cos \theta_1 = 1$$

و در حالت دوم خطوط میدان با سطح حلقه زاویه  $30^\circ$  درجه می‌سازند. یعنی:

$$\theta_2 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{1}{2}$$

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده داریم:

$$|\varepsilon_{av}| = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -N \frac{AB(\cos \theta_2 - \cos \theta_1)}{\Delta t}$$

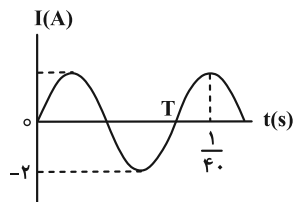
$$\Rightarrow |\varepsilon_{av}| = -1 \times \frac{0.01 \times 4 \times (\frac{1}{2} - 1)}{2 \times 10^{-3}} \Rightarrow |\varepsilon_{av}| = 10V$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

(زهره آقاممدری)

۶۰- گزینه «۲»

ابتدا دوره تناوب معادله جریان را می‌یابیم، با توجه به شکل داریم:



$$T + \frac{T}{4} = \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{5T}{4} = \frac{1}{40} \Rightarrow T = \frac{1}{50}$$

اکنون جریان الکتریکی در لحظه  $t = \frac{1}{200} s$  را پیدا می‌کنیم:

$$I = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t = \frac{I_m = 2A}{t = \frac{1}{200} s} \rightarrow I = 2 \times \sin \left( \frac{2\pi}{\frac{1}{50}} \times \frac{1}{200} \right)$$

$$\Rightarrow I = 2 \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = 2A$$

در نهایت اندازه نیروی محرکه القایی در حلقه را می‌یابیم:

$$\varepsilon = RI \xrightarrow{R=8\Omega} \varepsilon = 8 \times 2 = 16V$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب: صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

با محاسبه مقاومت معادل و جریان عبوری از باتری داریم:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_{\text{eq}} = 3\Omega$$

$$R_{\text{eq}} = 3 + 1/5 = 4/5\Omega \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{eq}} + r} = \frac{18}{4/5 + 1/5} = 3A$$

$$6x = I \Rightarrow x = 0/5A$$

ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌های  $R_3$ ،  $R_4$

$$V_4 = R_4 x = 18 \times 0/5 = 9V$$

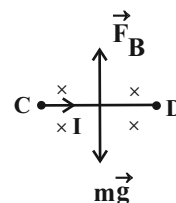
و  $R_4$  را نشان می‌دهد:

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم: صفحه‌های ۶۱ تا ۷۷)

۵۷- گزینه «۳»

(عبدالرضا امینی نسب)

برای آن که بر فنرها نیرویی وارد نشود، باید نیروی مغناطیسی و نیروی وزن با هم برابر شوند. می‌دانیم نیروی وزن به سمت پایین است، بنابراین نیروی مغناطیسی باید به سمت بالا باشد و طبق قاعده دست راست، جریان سیم باید از C به D باشد و در نتیجه باتری B باید در مدار قرار گیرد:



$$F_B = mg \Rightarrow I \ell B \sin \theta = mg \Rightarrow I = \frac{mg}{\ell B \sin \theta}$$

$$\Rightarrow I = \frac{60 \times 10^{-3} \times 10}{1/2 \times 0/5 \times 1} = 1A$$

برای محاسبه ولتاژ باتری داریم:

$$V = R_{\text{eq}} I = 0/5 \times 1 = 0/5V$$

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۵۸- گزینه «۳»

(مهمدر علی راست پیمان)

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) نادرست؛ مواد پارامغناطیسی در حضور میدان‌های مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی ضعیف و موقت پیدا می‌کنند.

(۲) نادرست؛ زیرا فولاد در میدان مغناطیسی خارجی خاصیت مغناطیسی پیدا می‌کند و در خارج میدان، بخشی از این خاصیت را حفظ می‌کند.

(۴) نادرست؛ مس و نقره جزء مواد دیامغناطیسی‌اند.

(فیزیک ۲- مغناطیس: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

فیزیک ۱

۶۱- گزینه «۴»

(مصطفی کیانی)

می دانیم یکای نجومی برابر با میانگین فاصله زمین تا خورشید است. یعنی

یکای نجومی برابر با  $1 \text{ AU} = 1/5 \times 10^{11} \text{ m}$  می باشد. بنابراین داریم:

$$d = 5 \times 10^{16} \text{ m} = 5 \times 10^{16} \text{ m} \times \frac{1 \text{ AU}}{1/5 \times 10^{11} \text{ m}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{3} \times 10^5 \text{ AU} = \frac{1}{3} \times 10^6 \text{ AU}$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه گیری: صفحه ۸)

۶۲- گزینه «۲»

(فسین مفرومی)

با توجه به رابطه چگالی داریم:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \frac{V_A}{V_B} \xrightarrow{V = \frac{4}{3}\pi R^3} \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3$$

$$\xrightarrow{D=2R} \frac{1}{2} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow m_A = 16m_B$$

جرم گلوله A از جرم گلوله B بزرگ تر است، بنابراین داریم:

$$m_A - m_B = 300 \text{ g} \Rightarrow 16m_B - m_B = 300$$

$$\Rightarrow 15m_B = 300 \Rightarrow m_B = \frac{300}{15} = 20 \text{ g}$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه گیری: صفحه های ۱۶ تا ۱۸)

۶۳- گزینه «۳»

(مصطفی کیانی)

ابتدا مساحت سطح مقطع پایین ظرف را می یابیم و حجم آن را حساب می کنیم:

$$A_1 = \pi r^2 \xrightarrow{r = \frac{D}{2}} A_1 = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$\xrightarrow{D=6 \text{ cm}} A_1 = 3 \times \frac{3600}{4} = 2700 \text{ cm}^2$$

$$V_1 = A_1 h_1 \xrightarrow{h_1=10 \text{ cm}} V_1 = 2700 \times 10 = 27000 \text{ cm}^3$$

اکنون مشخص می کنیم از ۳۶ لیتر مایع، چند لیتر آن در قسمت باریک ظرف جای

می گیرد و سپس ارتفاع مایع قسمت باریک را حساب می کنیم. دقت کنید برای سادگی

محاسبه، لیتر را به  $\text{cm}^3$  تبدیل می کنیم. چون هر لیتر برابر با  $1000 \text{ cm}^3$  است،

بنابراین حجم کل مایع  $36000 \text{ cm}^3$  است که  $V_1 = 27000 \text{ cm}^3$  آن در

قسمت بزرگ تر ظرف و  $V_2 = 36000 - 27000 = 9000 \text{ cm}^3$  در

قسمت باریک ظرف جای می گیرد. با توجه به این که مساحت سطح مقطع باریک ظرف

$300 \text{ cm}^2$  است، ارتفاع مایع در آن برابر است با:

$$V_2 = A_2 h_2 \xrightarrow{A_2=300 \text{ cm}^2, V_2=9000 \text{ cm}^3} 9000 = 300 \times h_2$$

$$\Rightarrow h_2 = 30 \text{ cm}$$

در پایان به صورت زیر چگالی مایع را پیدا می کنیم. ارتفاع مایعی که بر کف

ظرف فشار وارد می کند، برابر با  $h = h_1 + h_2 = 10 + 30 = 40 \text{ cm}$

است. در این حالت داریم:

$$\begin{cases} P = \rho gh \\ F = PA \end{cases} \Rightarrow F = \rho gh A_1 \xrightarrow{h=40 \text{ cm}=0.4 \text{ m}, F=2700 \text{ N}, A_1=2700 \text{ cm}^2=270 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \rightarrow$$

$$2700 = \rho \times 10 \times 0.4 \times 270 \times 10^{-4} \Rightarrow \rho = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

(فیزیک ۱- ویژگی های فیزیکی مواد: صفحه های ۳۲ تا ۳۸)

۶۴- گزینه «۲»

(مصطفی کیانی)

با توجه به معادله پیوستگی، مقدار آبی که در هر دقیقه از مقطع A وارد لوله

می شود، باید در یک دقیقه از مقطع B لوله خارج شود. بنابراین در هر دقیقه

۱۰ لیتر آب از مقطع B خارج می شود.

برای محاسبه تندی آب در مقطع B، با استفاده از معادله پیوستگی می توان نوشت:

$$A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow \pi r_A^2 v_A = \pi r_B^2 v_B$$

$$\xrightarrow{r_B=2r_A} r_A^2 \times 4/5 = 9r_A^2 v_B \Rightarrow v_B = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(فیزیک ۱- ویژگی های فیزیکی مواد: صفحه های ۳۳ تا ۳۵)

۶۵- گزینه «۱»

(زهره آقاممیری)

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی، یعنی  $W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ ، وقتی کار نیروی خالص صفر باشد،  $(W_t = 0)$  لازم است  $\Delta K = 0$  باشد. یعنی  $v_1 = v_2$  باشد.

الف) نادرست؛ اگر  $W_t = 0$  باشد، نمی توان گفت الزاماً سرعت جسم ثابت است. ممکن است جسم بر روی مسیر غیرمستقیم با تندی ثابت در حرکت باشد. در این صورت  $W_t = 0$  است، اما چون جهت بردار سرعت تغییر می کند، سرعت جسم نمی تواند ثابت بماند.

ب) درست؛ زیرا  $W_t = \Delta K \xrightarrow{W_t=0} \Delta K = 0$  ب) نادرست؛ ممکن است جسم بر مسیر غیرمستقیم با تندی ثابت حرکت کند و سرعت جسم متغیر باشد. در این صورت حرکت جسم شتابدار است و طبق قانون دوم نیوتون بر جسم نیرو وارد می شود.

ت) نادرست؛ چون  $\Delta U = mgh$  است، اگر جسم در راستای قائم جابه جا شود و  $W_t = 0$  باشد، الزاماً  $\Delta U \neq 0$  است. پس تنها مورد (ب) صحیح است.

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه های ۶۱ تا ۶۷)

۶۶- گزینه «۲»

(امیرمهر عبودی)

با توجه به رابطه چگالی، جرم آبی را که پمپ در هر دقیقه بیرون می آورد را محاسبه می کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{L}}} 1 = \frac{m}{1200} \Rightarrow m = 1200 \cdot \text{kg}$$

طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W + W_{mg} = \Delta K$$

$$\xrightarrow{W_{mg} = -\Delta U} W = \Delta K + \Delta U$$

با توجه به تعریف توان خروجی می توان نوشت:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \Rightarrow P = \frac{\Delta K + \Delta U}{\Delta t}$$

تندی نهایی برابر  $v = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است. بنابراین داریم:

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{1}{2} \times (1200) \times (10^2) + 1200 \times (10) \times (30)}{60} = 7000 \text{ W}$$

حال بازده پمپ آب را با توجه به توان ورودی پیدا می کنیم:

$$\text{بازده} = \frac{7000}{10000} \times 100 = 70\%$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه های ۶۱ تا ۶۷ و ۷۳ تا ۷۶)

۶۷- گزینه «۲»

(مسعود قره قانی)

ابتدا تغییرات درجه فارنهایت را به درجه سلسیوس یا کلوین تبدیل می کنیم:

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \xrightarrow{\Delta F = 540^\circ \text{F}} 540 = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = 300^\circ \text{C}$$

حال برای درصد افزایش سطح داریم:

$$\Delta A = \alpha A_1 \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta A}{A_1} = \alpha \Delta T$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = \alpha \Delta T \times 100$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = 2 \times 5 \times 10^{-5} \times 300 \times 100 = 3\%$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه های ۸۴ تا ۹۴)

۶۸- گزینه «۲»

(زهره آقاممیری)

در مرحله اول، جرم آب با دمای  $30^\circ \text{C}$  برابر با  $m_1 = 200 - m$  و جرم

آب با دمای  $60^\circ \text{C}$  برابر با  $m_2 = m$  است. بنابراین، ابتدا با استفاده از

رابطه تعادل گرمایی،  $m$  را می یابیم:

$$\boxed{30^\circ \text{C} \text{ آب}} \xrightarrow{Q_1} \boxed{40^\circ \text{C} \text{ آب}} \xleftarrow{Q_2} \boxed{60^\circ \text{C} \text{ آب}}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0 \xrightarrow{Q = mc\Delta\theta} m_1 c (\theta - \theta_1) + m_2 c (\theta - \theta_2) = 0$$

$$\xrightarrow{m_1 = 200 - m, m_2 = m} \theta_1 = 30^\circ \text{C}, \theta_2 = 60^\circ \text{C}, \theta = 40^\circ \text{C}}$$

$$(200 - m) \times (40 - 30) + m \times (40 - 60) = 0$$

$$\Rightarrow (2000 - 10m) = 20m \Rightarrow 2000 = 30m$$

$$\Rightarrow m = \frac{200}{3} \text{ g}$$

$$\frac{P_B V_B}{P \cdot 2V} < \frac{P_A V_A}{4P \cdot V} \Rightarrow \frac{P_B V_B}{nR} < \frac{P_A V_A}{nR} \Rightarrow T_B < T_A$$

$$\Rightarrow \Delta T < 0 \Rightarrow \Delta U < 0$$

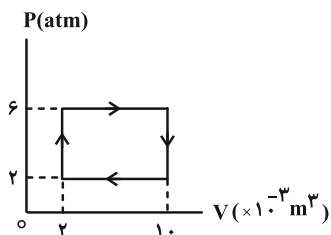
(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹)

(مصطفی کیانی)

۷۰- گزینه «۳»

ابتدا مساحت داخل چرخه را که برابر با کار انجام شده توسط ماشین گرمایی

در یک چرخه است، می‌یابیم.



$$|W| = \text{مساحت مستطیل} = (10-2) \times 10^{-3} \times (6-2) \times 10^5 = 3200 \text{ J}$$

اکنون بازده ماشین گرمایی را پیدا می‌کنیم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{3200 \text{ J}}{6400 \text{ J}} = 0.5 \Rightarrow \eta = 50\%$$

برای محاسبه توان ماشین باید از رابطه  $P = \frac{W}{t}$  استفاده کنیم. در این رابطه

کار انجام شده در هر دقیقه (۶۰s) که مربوط به ۳۰ چرخه است را می‌یابیم.

دقت کنید، ماشین در هر چرخه ۳۲۰۰J کار انجام می‌دهد:

$$|W_{\text{کل}}| = 3200 \times 30 = 96000 \text{ J} = 96 \text{ kJ}$$

$$P = \frac{|W_{\text{کل}}|}{t} = \frac{96000 \text{ J}}{60 \text{ s}} = 1600 \text{ W} = 1.6 \text{ kW}$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۵)

در مرحله دوم در ظرف ۲۰۰g آب با دمای ۴۰°C وجود دارد که با

برداشتن  $m = \frac{200}{3} \text{ g}$  از آب و اضافه کردن  $m = \frac{200}{3} \text{ g}$  آب با دمای ۷۰°C.

جرم آب با دمای ۴۰°C برابر با  $m_3 = 200 - \frac{200}{3} = \frac{400}{3} \text{ g}$

دمای ۷۰°C برابر با  $m_4 = \frac{200}{3} \text{ g}$  می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$[40^\circ\text{C آب}] \xrightarrow{Q_2} [\theta'^\circ\text{C آب}] \xleftarrow{Q_4} [70^\circ\text{C آب}]$$

$$Q_2 + Q_4 = 0 \Rightarrow m_3 c (\theta' - \theta_3) + m_4 c (\theta' - \theta_4) = 0$$

$$\theta_3 = 40^\circ\text{C}, \theta_4 = 70^\circ\text{C}$$

$$m_3 = \frac{400}{3} \text{ g}, m_4 = \frac{200}{3} \text{ g}$$

$$\frac{400}{3} \times (\theta' - 40) + \frac{200}{3} (\theta' - 70) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{400}{3} \times (\theta' - 40) = -\frac{200}{3} (\theta' - 70)$$

$$\Rightarrow 2\theta' - 80 = -\theta' + 70 \Rightarrow 3\theta' = 150 \Rightarrow \theta' = 50^\circ\text{C}$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۰)

۶۹- گزینه «۴»

(علی بزرگر)

چون حجم گاز از V به ۳V رسیده است، یعنی گاز منبسط شده است؛ لذا

$$W < 0$$

می‌توان نوشت:

از طرفی تغییرات انرژی درونی به  $\Delta T$  وابسته است. لذا داریم:

$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

شیمی ۲

۷۱- گزینه «۳»

(مسئله لشکری)

با توجه به نمودار صفحه ۱۳، اختلاف شعاع اتمی بین  $Na$  و  $Mg$  بیشتر از اختلاف شعاع اتمی  $Cl$  و  $S$  است.

(شیمی ۲- قدر هدرایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۷۲- گزینه «۲»

(مجتبی منسوب)

ابتدا مقدار  $Na$  حاصل از انجام واکنش اول را تعیین می‌کنیم:

$$7AgNaN_3 \times \frac{xgNaN_3}{100gNaN_3} \times \frac{1molNaN_3}{65gNaN_3} \times \frac{2molNa}{2molNaN_3}$$

$$\times \frac{50molNa}{100molNa} = 0.006x molNa$$

حال با توجه به واکنش دوم برای تعیین مقدار آهن حاصل از مصرف این

میزان سدیم می‌توان نوشت:

$$0.006x molNa \times \frac{2molFe}{6molNa} \times \frac{56gFe}{1molFe} \times \frac{50gFe}{100gFe} = 2.24gFe$$

$$\Rightarrow x = 40$$

(شیمی ۲- قدر هدرایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۷۳- گزینه «۴»

(جعفر پازوکی)

با توجه به فرمول مولکولی ترکیبات داده شده داریم:

$$10 \neq 12 \Rightarrow C_5H_{12} \text{ پنتان و } C_1H_8 \text{ نفتالن (۱)}$$

$$6 \neq 14 \Rightarrow C_6H_{14} \text{ هگزان و } C_6H_{12} \text{ سیکلوهگزان (۲)}$$

$$10 \neq 22 \Rightarrow C_1H_{22} \text{ دکان و } C_1H_8 \text{ نفتالن (۳)}$$

$$6 = 6 \Rightarrow C_6H_6 \text{ بنزن و } C_6H_{12} \text{ سیکلوهگزان (۴)}$$

(شیمی ۲- قدر هدرایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۷ و ۴۳)

۷۴- گزینه «۳»

(آترین صبا)

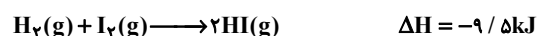
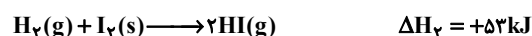
فرمول مولکولی آلکان مورد نظر  $C_{11}H_{24}$  است. شمار پیوندهای کربن-کربن در آن برابر با ۱۰ و شمار پیوندهای کربن-هیدروژن در آن برابر با ۲۴ است.

$$C_nH_{2n+2} \Rightarrow \begin{cases} [C-C \text{ شمار پیوندهای}] = n-1 \\ [C-H \text{ شمار پیوندهای}] = 2n+2 \end{cases}$$

(شیمی ۲- قدر هدرایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

۷۵- گزینه «۳»

(سیرمشمیر معروفی)

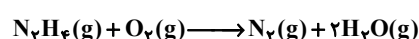


$$101 / 6gI_2 \times \frac{1molI_2}{254gI_2} \times \frac{-9500J}{1molI_2} = -3800J$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۴ و ۷۴ تا ۷۷)

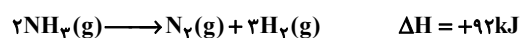
۷۶- گزینه «۱»

(امیرحسین توفیری)

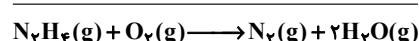


با توجه به معادله‌های زیر  $\Delta H$  واکنش فوق را می‌یابیم:

واکنش اول را معکوس می‌کنیم:



واکنش دوم و سوم را بدون تغییر می‌نویسیم:



$$\Delta H \text{ واکنش} = +92 - 242 - 187 = -337kJ$$

گرمای حاصل از تولید ۱۵۰ لیتر  $N_2$  برابر است با:

$$150L N_2 \times \frac{1 \text{ mol } N_2}{25L N_2} \times \frac{337kJ}{1 \text{ mol } N_2} = 2022kJ$$

حال با استفاده از رابطه  $Q = mc\Delta\theta$  جرم آب را محاسبه می‌کنیم:

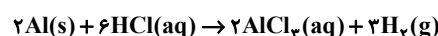
$$2022 \times 10^3 = m \times 4 / 2 \times (100 - 20) \Rightarrow m = 6017g \Rightarrow \text{آب } 6kg$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰ و ۷۴ تا ۷۷)

۷۷- گزینه «۴»

(مهم‌ترین مهم‌ترین)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



مقدار مول  $HCl$  مصرف شده در این بازه زمانی برابر است با:

$$? \text{ mol } HCl = 2AL H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{22 / 4L H_2} \times \frac{6 \text{ mol } HCl}{3 \text{ mol } H_2} = 2 / 5 \text{ mol } HCl$$

$$[HCl] = \frac{2 / 5}{2} = \frac{5}{4} \text{ mol } .L^{-1}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\bar{R}_{HCl} = - \frac{\Delta[HCl]}{\Delta t} = \frac{5}{4 \times 60} \approx 1 / 0.4 \times 10^{-2} \text{ mol } .L^{-1} .s^{-1}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۰، ۹۲ و ۹۳)

۷۸- گزینه «۳»

(سیر رفیع هاشمی‌دهکردی)

بررسی گزینه‌های نادرست:

$$\bar{R}(K_2O) = \frac{2}{5} \bar{R}(O_2) \text{ رابطه درست این دو ماده به صورت}$$

است.

گزینه «۲»:  $KNO_3$  واکنش‌دهنده بوده و با گذشت زمان مول آن کاهش می‌یابد. در رابطه باید علامت منفی قرار گیرد.

گزینه «۴»: نباید در کسر سمت چپ علامت منفی قرار گیرد زیرا سرعت واکنش عددی مثبت است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۷۹- گزینه «۴»

(منصور سلیمانی‌ملکان)

مجموع شمار الکترون‌های پیوندی در این مولکول برابر ۸۲ است. مجموع

شمار الکترون‌های ناپیوندی نیز برابر ۴ می‌باشد که نسبت این دو عدد برابر با

۲۰ / ۵ می‌شود.

شکل درست گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: ترکیب (پ) در دارچین وجود دارد.

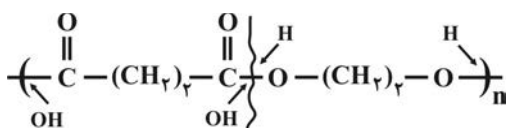
گزینه «۲»: تمامی ترکیبات به جز ترکیب (ب) آروماتیک هستند.

گزینه «۳»: ساختار (آ) متعلق به خانواده اترها است.

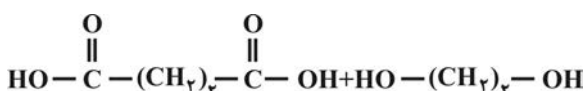
(شیمی ۲- در پی غذای سالم: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۸۰- گزینه «۱»

(مسعود طبرسا)



اسید و الکل سازنده:



اسید سازنده:

$$C_r H_r O_r = 118g . \text{mol}^{-1}$$

الکل سازنده:

$$C_r H_r O_r = 62g . \text{mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow 118 + 62 = 180g . \text{mol}^{-1}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۱ و ۱۱۳ تا ۱۱۶)

شیمی ۱

۸۱- گزینه ۲»

(مسئله لشری)

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت «ب»: با تزریق گلوکز نشان‌دار فقط تشخیص توده سرطانی امکان‌پذیر است.

عبارت «ت»: یکی از ایزوتوپ‌های اورانیم ( $^{235}\text{U}$ )، اغلب به عنوان سوخت در راکتورهای اتمی به کار می‌رود.

(شیمی ۱- کیهان زارگانه عناصر: صفحه‌های ۷ تا ۹)

۸۲- گزینه ۱»

(معمرباشا پورجاوید)

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه ۲»: در بین پرتوهای الکترومغناطیسی، پرتوهای گاما دارای کوتاه‌ترین طول موج هستند.

گزینه ۳»: نور زرد نسبت به نور قرمز، طول موج کوتاه‌تری دارد و با عبور از منشور انحراف بیشتری از خود نشان می‌دهد.

گزینه ۴»: نور خورشید با عبور از قطره‌های آب موجود در هوا، تجزیه شده و گستره پيوسته‌ای از رنگ‌ها را به وجود می‌آورد.

(شیمی ۱- کیهان زارگانه عناصر: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۸۳- گزینه ۴»

(معمرباشا پورجاوید)

تنها عنصر دوره چهارم که شمار الکترون‌های زیرلایه d با شمار الکترون‌های لایه چهارم برابر است، تیتانیم با آرایش الکترونی فشرده زیر است:

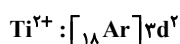


بررسی گزینه‌ها:

(۱) تیتانیم در گروه ۴ جای دارد:

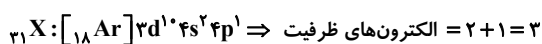
$4 = 2 + 2$  شمار الکترون‌های زیرلایه s آخر و زیرلایه d قبل = شماره گروه

(۲)



(۳) تیتانیم در دسته d جای داشته و شمار الکترون‌های ظرفیت آن برابر با ۴ ( $4 = 2 + 2$ ) است.

(۴) شمار الکترون‌های ظرفیت  $31\text{X}$  برابر است با:



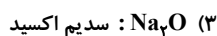
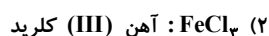
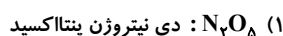
پس، شمار الکترون‌های ظرفیت تیتانیم از عنصر  $31\text{X}$  بیشتر است.

(شیمی ۱- کیهان زارگانه عناصر: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۸۴- گزینه ۴»

(امیرمسین تومیدی)

نام درست ترکیب‌ها:

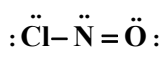
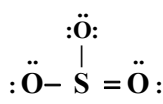


(شیمی ۱- رد پای گازها در زندگی: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۸۵- گزینه ۱»

(معمرباشا پورجاوید)

ساختار لوویس چهار ترکیب به صورت زیر است:



از انحلال هر مول سدیم سولفات در آب یک مول یون سولفات پدید می آید:

$$? \text{mg Na}_2\text{SO}_4 = 38 / 4 \times 10^{-4} \text{g SO}_4^{2-}$$

$$\times \frac{1 \text{mol SO}_4^{2-}}{96 \text{g SO}_4^{2-}} \times \frac{1 \text{mol Na}_2\text{SO}_4}{1 \text{mol SO}_4^{2-}} \times \frac{142 \text{g Na}_2\text{SO}_4}{1 \text{mol Na}_2\text{SO}_4} \times \frac{1000 \text{mg}}{1 \text{g}}$$

$$= 5 / 68 \text{mg Na}_2\text{SO}_4$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی: صفحه های ۹۴ و ۹۵)

(آروین شاعی)

۸۹- گزینه «۲»

$$S_A = S_B \Rightarrow -0 / 30 + 70 = 1 / 40 + 36$$

$$\Rightarrow 1 / 70 = 36 \Rightarrow \theta = 20^\circ \text{C}$$

نمودار انحلال پذیری نمک A شیب منفی داشته و انحلال پذیری آن گرماده

است. بنابراین با کاهش دما نه تنها محلول رسوب نداده بلکه انحلال پذیری

آن بیشتر می شود. بنابراین مقدار رسوب برابر صفر است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی: صفحه های ۱۰۰ تا ۱۰۳)

(سیدمحمدرضا میرقائم)

۹۰- گزینه «۴»

در فرایند تصفیه آب به روش های اسمز معکوس و استفاده از صافی کربن،

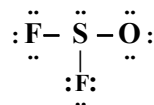
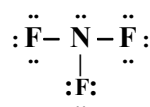
همه آلاینده ها به جز میکروب ها حذف می شوند که در نهایت برای از بین

بردن میکروب ها می بایست از فرایند کلرزنی استفاده کرد. در روش تقطیر

برخلاف روش های ذکر شده، علاوه بر میکروب ها، ترکیب های آلی فرار هم

حذف نمی شوند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی: صفحه ۱۱۹)



(شیمی ۱- رد پای گازها در زندگی: صفحه های ۵۷ و ۵۸)

(آترین صبا)

۸۶- گزینه «۲»

بررسی گزینه های نادرست:

۱) اگر هوا کره وجود نداشت، میانگین دمای کره زمین کاهش می یافت.

۳) بخش عمده ای از پرتوهای خورشیدی توسط زمین جذب می شود.

۴) زمین گرمای جذب شده را به صورت تابش فروسرخ از دست می دهد.

(شیمی ۱- رد پای گازها در زندگی: صفحه های ۶۸ و ۶۹)

(مجتبی محبوب)

۸۷- گزینه «۲»



$$? \text{g HCl} = 14 / 2 \text{L Cl}_2 \times \frac{0 / 4 \text{g Cl}_2}{1 \text{L Cl}_2} \times \frac{1 \text{mol Cl}_2}{71 \text{g Cl}_2} \times \frac{4 \text{mol HCl}}{1 \text{mol Cl}_2} \times \frac{36 / 5 \text{g HCl}}{1 \text{mol HCl}}$$

$$= 11 / 68 \text{g HCl}$$

(شیمی ۱- رد پای گازها در زندگی: صفحه های ۶۳ تا ۶۵، ۷۹ و ۸۰)

(مجتبی محبوب)

۸۸- گزینه «۳»

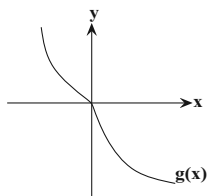
ابتدا مقدار یون سولفات حل شده در محلول را تعیین می کنیم. از آنجایی که

صورت سوال گفته جرم حل شونده در حد میلی گرم است پس جرم حلال و

محلول را به تقریب یکسان در نظر می گیریم:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 38 / 4 = \frac{x}{100} \times 10^6$$

$$\Rightarrow x = 38 / 4 \times 10^{-4} \text{g SO}_4^{2-}$$



با توجه به نمودار  $g(x)$ ، به ازای ورودی‌های کوچک‌تر یا مساوی صفر، مقدار تابع بزرگ‌تر یا مساوی صفر می‌شود.

$$g(f(x)) \geq 0 \rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow 3x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{5}{3}$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

(سعید علیزاده)

۹۴- گزینه «۲»

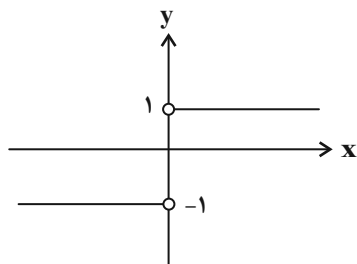
دامنه و برد توابع  $g$  و  $g^{-1}$  برابر با  $\mathbb{R}$  است و داریم:

$$g(x) = x^3 - 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

دامنه تابع  $f$  نیز  $\mathbb{R} - \{1\}$  است، پس دامنه تابع  $\text{fog}^{-1}$ ،  $\mathbb{R} - \{0\}$  است. داریم:

$$(\text{fog}^{-1})(x) = \begin{cases} 1 & ; \sqrt[3]{x+1} > 1 \\ -1 & ; \sqrt[3]{x+1} < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است. واضح است که تابع روی دامنه  $\mathbb{R} - \{0\}$  صعودی و یکنواست.



(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

(سعید چغری)

۹۵- گزینه «۲»

چون چندجمله‌ای مورد نظر بر  $x+1$  و  $x-2$  بخش پذیر است، لذا:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$p(x) = ax^3 - bx^2 + ax + 6$$

$$p(-1) = 0 \Rightarrow -a - b - a + 6 = 0 \quad (1)$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow 8a - 4b + 2a + 6 = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = -6 \\ 10a - 4b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow a + b = 5$$

(مسئله ۲- تابع: مشابه تمرین ۶ صفحه ۲۲)

## حسابان ۲

۹۱- گزینه «۳»

(علی اصغر شریفی)

قرینه نسبت به  $y = x$  یعنی همان وارون کردن:

$$y = \sqrt{x-1}; y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow y^2 + 1 = x$$

جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم:

$$\Rightarrow y = x^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = x^2 + 4$$

$$\xrightarrow{\text{انبساط افقی با ضریب ۲}} y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4; x \geq 0$$

$$y = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + 4 = 8 \Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow x = \pm 4 \xrightarrow{x \geq 0} x = 4$$

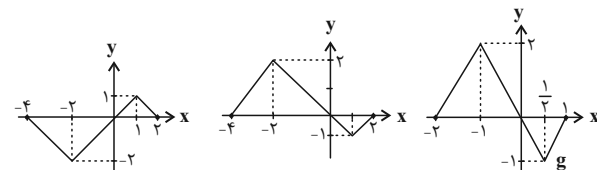
(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۹۲- گزینه «۳»

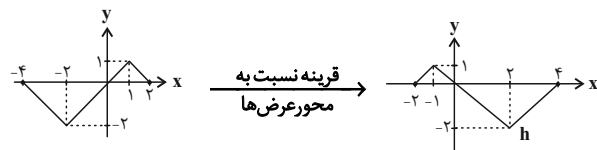
(کاظم ایلالی)

نمودار تابع  $g$  به صورت زیر رسم می‌شود:

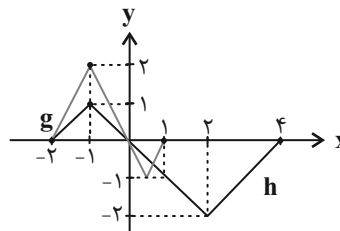
$$y = f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول ها}} y = -f(x) \xrightarrow{\text{نصف کردن طول نقاط}} g(x) = -f(2x)$$



نمودار تابع  $h$  به صورت زیر رسم می‌شود:



بنابراین نمودار دو تابع سه نقطه مشترک دارند:



(مسئله ۲- تابع: مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۲)

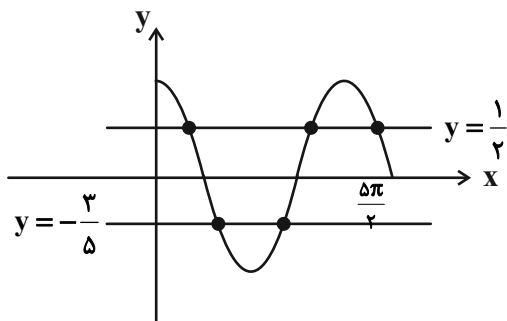
۹۳- گزینه «۳»

(امیر هوقادی)

از آن جا که  $g(x)$  یک تابع اکیداً نزولی است که از مبدأ مختصات می‌گذرد، نمودار آن می‌تواند به صورت شکل زیر باشد. برای یافتن دامنه

تابع  $y = \sqrt{(gof)(x)}$  داریم:

$$(gof)(x) \geq 0 \Rightarrow g(f(x)) \geq 0$$



(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۶)

(علیرضا ندرافزاده)

گزینه «۱» ۹۹

ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{5}{4} = 0$$

پس داریم:

$$(\sin x + \frac{5}{4})(\sin x - \frac{1}{4}) = 0 \xrightarrow{-1 \leq \sin x \leq 1} \sin x = \frac{1}{4}$$

در بازه  $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$  سینوس دو زاویه  $x_1 = \frac{\pi}{6}$  و  $x_2 = \frac{5\pi}{6}$  برابر  $\frac{1}{4}$  است.

$$\Rightarrow \alpha = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3}$$

و در نهایت داریم:

$$\tan \alpha = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

(مسئله ۲- مثلثات: مشابه تمرین ۱ صفحه ۳۴)

(علی سلامت)

گزینه «۴» ۱۰۰

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(2\alpha + \beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \beta}{1 - \tan 2\alpha \tan \beta} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \tan \beta}{1 - \frac{1}{2} \tan \beta} = 1 \Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه ۳۲)

(جوانبش نیکنام)

گزینه «۲» ۹۶

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, f(0) = -1 \Rightarrow y_A = -1$$

$$y_{\max} = |a| - 1 = 2 \Rightarrow |a| = 3$$

$$y_{\min} = -|a| - 1 = -3 - 1 = -4 \Rightarrow y_C = -4$$

با توجه به عرض نقاط A و C، طول ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث، برابر با ۳ می‌باشد و با توجه به شکل داریم:

$$AB = T + \frac{T}{2} = \frac{3T}{2} = \frac{3\pi}{|b|}$$

$$S_{ABC} = \frac{3 \times \frac{3\pi}{|b|}}{2} = \frac{9\pi}{2|b|} = \frac{9\pi}{4} \Rightarrow |b| = 2$$

از طرفی با توجه به نمودار، a و b هم‌علامت نیستند؛ پس داریم:

$$(a = -3, b = 2) \text{ یا } (a = 3, b = -2)$$

پس کم‌ترین مقدار a + b برابر با -۱ می‌باشد.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

(جوانبش نیکنام)

گزینه «۴» ۹۷

دوره تناوب تابع برابر است با  $T = \frac{\pi}{2}$ . پس داریم:  $OB = \frac{3}{2}T = \frac{3\pi}{4}$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \sqrt{3} \xrightarrow{0 < \alpha < \frac{\pi}{4}} 2\alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$f(\frac{1}{2}\alpha) = \tan \frac{1}{2}\alpha = \tan(\frac{1}{12}\pi)$$

$$= \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

(جوانبش نیکنام)

گزینه «۲» ۹۸

$$\Delta(2\cos^2 \theta - 1) + 2(\frac{1 + \cos \theta}{2}) + 1 = 1 \cdot \cos^2 \theta + \cos \theta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta \cos \theta + 3)(2\cos \theta - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \cos \theta = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

نمودار تابع  $y = \cos x$  و خطوط  $y = \frac{1}{2}$  و  $y = -\frac{3}{5}$  را رسم

می‌کنیم. می‌بینیم که در بازه مذکور، تعداد نقاط تلاقی برابر ۵ است:

هندسه ۳

۱۰۱- گزینه «۱»

(امیرحسین ملازینل)

ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی} = 1+2+1=4 \\ \text{مجموع درایه‌های بالای قطر فرعی} = 1+2+3=6 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{4} = 1.5$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ مشابه تمرین ۱ صفحه ۲۰)

۱۰۲- گزینه «۱»

(رضا عباسی اصل)

واضح است که A ماتریسی ۱×۳ می‌باشد. بنابراین اگر

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \text{ در نظر گرفته شود، آنگاه داریم:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & -1 \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

حال:

$$a+b+c = 2x+2y+3z = 2x+5y = 2(3)+5(1) = 11$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱۰۳- گزینه «۴»

(سراسری ریاضی - ۹۷)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

۱۶ = مجموع درایه‌های قطر اصلی  $C^2$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱۰۴- گزینه «۲»

(سیرامیر ستوده)

$$I - \lambda A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & 1-\frac{\lambda}{2} \end{bmatrix}$$

شرط وارون پذیری  $I - \lambda A$  این است که  $|I - \lambda A| \neq 0$  باشد، پس داریم:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} \neq 0 \Rightarrow 1 - \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱۰۵- گزینه «۲»

(سراسری ریاضی - ۹۵)

طبق تعریف ماتریس وارون داریم:

$$A(I - A) = I \Rightarrow A - A^2 = I \Rightarrow A^2 = A - I \quad (*)$$

طرفین تساوی ماتریسی به دست آمده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^4 = (A - I)^2 \Rightarrow A^4 = A^2 - 2A + I$$

$$\xrightarrow{(*)} A^4 = A - I - 2A + I = -A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۱۰۶- گزینه «۴»

(سراسری ریاضی - ۹۲)

$$\text{با فرض } B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ معادله مفروض}$$

سؤال به صورت  $BAC = D$  خواهد بود. برای یافتن ماتریس A، طرفین این

معادله را از راست در ماتریس  $C^{-1}$  و از چپ در ماتریس  $B^{-1}$  ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix} = \frac{m}{abc}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: برگرفته از سوال ۸ تمرین صفحه ۳۱)

(علی وزیری)

۱۰۹- گزینه «۳»

با محاسبه  $|A|$  داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A|^2 & |A| \\ 3 & 4|A| \end{vmatrix} = 4|A|^3 - 3|A|$$

$$\Rightarrow 4|A|^3 = 4|A| \Rightarrow \begin{cases} |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1 \\ |A| = 0 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر مختلف  $|A|$  برابر است با:

$$0 + 1 - 1 = 0$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: مشابه تمرین ۳ صفحه ۳۰)

(فسرو خلعت بری)

۱۱۰- گزینه «۴»

اگر دترمینان را بر حسب سطر اول آن بسط دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} & -(x-a) \begin{vmatrix} a-x & x-c \\ b-x & 0 \end{vmatrix} + (x-b) \begin{vmatrix} a-x & 0 \\ b-x & c-x \end{vmatrix} \\ & = -(x-a)[0 - (x-c)(b-x)] + (x-b)[(a-x)(c-x) - 0] \\ & = -(x-a)(x-c)(x-b) + (x-b)(x-a)(x-c) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین، حاصل دترمینان به ازای تمامی مقادیر حقیقی  $x$ ، برابر صفر است و

در نتیجه معادله بی‌شمار جواب دارد.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

$$\Rightarrow (B^{-1}B)A(CC^{-1}) = B^{-1}DC^{-1}$$

$$\Rightarrow IAI = B^{-1}DC^{-1}$$

$$\frac{IA=AI=A}{\rightarrow} A = B^{-1}DC^{-1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{5-6} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

از ضرب دو ماتریس ابتدایی، تنها درایه‌های مربوط به سطر اول حاصل ضرب

را محاسبه می‌کنیم. سپس ماتریس حاصل را در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -21 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱۰۷- گزینه «۲» (ممبر صحت‌کار)

برای این که دستگاه ذکر شده بی‌شمار جواب داشته باشد، باید دو خط ذکر شده بر هم منطبق باشند که یعنی:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{2m+1}{-7m} = \frac{-m}{m+6} = \frac{1}{-m}$$

حالا با حل تساوی به دست آمده، مقادیر ممکن برای  $m$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2m+1}{-7m} = \frac{1}{-m} \xrightarrow{m \neq 0} \frac{2m+1}{7} = 1 \Rightarrow m = 3$$

حالا  $m = 3$  را در تساوی اولیه جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{2 \times 3 + 1}{-7 \times 3} = \frac{-3}{3+6} = \frac{1}{-3}$$

بنابراین فقط به ازای  $m = 3$  این دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۳۱)

۱۰۸- گزینه «۲» (علیرضا شریف‌فطیمی)

$$m = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \times \frac{1}{a} & a \times 1 & a \times a \\ b \times \frac{1}{b} & b \times 1 & b \times b \\ c \times \frac{1}{c} & c \times 1 & c \times c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix}$$

ریاضیات گسسته

۱۱۱- گزینه «۴»

(مرتضی فعیم علوی)

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: ابتدا قضیه شرطی را اثبات می‌کنیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xrightarrow{\text{توان دوم}} a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \geq 4 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

بنابراین طرف اول قضیه دو شرطی درست است ولی برای رد درستی عکس

این قضیه شرطی، می‌توان  $a = -2$  را در نظر گرفت.

گزینه «۲»: خود قضیه شرطی واضح است. عکس آن می‌گوید که اگر

$a \neq -1$ ، آنگاه  $a > 0$  است که  $a = -2$  مثال نقضی برای آن است و این

گزینه رد می‌شود.

گزینه «۳»: مثال نقض برای رد کردن این گزاره شرطی  $\alpha = \sqrt{2}$  و

$\beta = -\sqrt{2}$  است.

گزینه «۴»: اگر  $k^3 > k^2$  باشد، می‌توانیم ثابت کنیم  $k > 1$ :

$$k^3 > k^2 \Leftrightarrow k^2 \times k > k^2 \times 1 \xrightarrow[\times k^2 > 0]{+k^2 > 0} k > 1$$

تمام مراحل اثبات بالا دوطرفه است (پس عکس قضیه نیز درست است)، بنابراین

گزاره ذکر شده در گزینه «۴» را می‌توان به صورت قضیه دوشروطی نوشت.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲ تا ۸)

۱۱۲- گزینه «۲»

(مقتار منصوری)

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b$$

$$\xrightarrow[\div ab < 0]{ab > 0} a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$\xrightarrow[\times (a+b) > 0]{+(a+b) > 0} a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۱۳- گزینه «۴»

(امیرمسین ابومصوب)

طبق خاصیت تعدی، گزینه «۴» صحیح است.

$$\left. \begin{matrix} bc | a \\ b | bc \end{matrix} \right\} \Rightarrow b | a \quad \left. \begin{matrix} bc | a \\ c | bc \end{matrix} \right\} \Rightarrow c | a$$

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها به شرح زیر است:

$$(1) \quad c = 5, b = 3, a = 2$$

$$(2) \quad c = 5, b = 3, a = 8$$

$$(3) \quad c = 2, b = 2, a = 4$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد:

برگرفته از متن کتاب درسی صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱۱۴- گزینه «۳»

(رضا پورمسینی)

قضیه تقسیم و شرط آن را طبق فرض می‌نویسیم:

$$a = 23q + 7q \Rightarrow \text{شرط تقسیم: } 7q < 23 \Rightarrow q < \frac{23}{7} \Rightarrow q \leq 3$$

$$q_{\max} = 3 \Rightarrow a_{\max} = 30(3) = 90 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۱۵- گزینه «۱»

(امیرمسین ملازینل)

طبق تعریف ب م م می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a | 2a & (\text{همواره درست}) \\ a | 27 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1, 3, 9, 27 \end{cases}$$

بنابراین ۴ مقدار طبیعی برای  $a$  ممکن است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

(مشابه نهایی خرداد ۱۳۰۴)

۱۱۶ - گزینه «۴»

(هومن نورانی)

طبق فرض سوال داریم:

$$8a - 5 \equiv 1 - 4a \Rightarrow 12a \equiv 6 \Rightarrow a \equiv 6 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 36 \\ 3a \equiv 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a \equiv 18 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 \equiv 20 \equiv 9$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱۱۷ - گزینه «۴»

(مختار منصوری)

با توجه به این که  $125 \equiv 1 \pmod{31}$ ، می‌توان نوشت:

$$5^{212} \equiv (5^3)^{70} \times 5^2 \equiv (125)^{70} \times 25 \equiv 1^{70} \times 25 \equiv 25$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۱۱۸ - گزینه «۱»

(سیرمستطقی سیرمستینی)

از آنجا که عدد ذکر شده مضرب ۹۹ است، نتیجه می‌شود که مضرب دو عدد ۹ و ۱۱ می‌باشد و می‌توان گفت:

$$1) \quad 4yx \equiv 1 \pmod{99} \Rightarrow 4 + x + y + 0 + 1 \equiv 0 \Rightarrow 5 + x + y \equiv 0$$

$$\Rightarrow x + y \equiv 4 \xrightarrow{0 \leq x+y \leq 18} x + y = 4 \text{ یا } 13$$

$$2) \quad 4yx \equiv 1 \pmod{99} \Rightarrow (1+x+4) - (0+y) \equiv 0 \Rightarrow 5+x-y \equiv 0$$

$$\Rightarrow x - y \equiv 5 \xrightarrow{-9 \leq x-y \leq 9} x - y = 5 \text{ یا } -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=9 \Rightarrow x^2+y=25$$

از سه دستگاه معادلات ممکن دیگر برای این سؤال، مقادیر  $x$  و  $y$ ، اعدادی منفی و یا کسری خواهند بود که امکان پذیر نیست.

راه دوم:

$$4yx \equiv 1 \pmod{99} \Rightarrow 10000 \times 4 + 100 \times yx + 1 \equiv 0$$

$$\Rightarrow 4 + yx + 1 \equiv 0 \Rightarrow yx \equiv -5 \equiv 94$$

$$\xrightarrow{0 \leq yx \leq 99} y = 9, x = 4$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۱۱۹ - گزینه «۳»

(بوار فاطمی)

طبق فرض داریم:

$$24x \equiv 42y \xrightarrow{(15,6)=3} 4x \equiv 7y \text{ : گزینه «۴»}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x \equiv 7y \xrightarrow{(5,2)=1} 2x \equiv y \text{ : گزینه «۲»} \\ 4x \equiv 12y \xrightarrow{(5,4)=1} x \equiv 3y \text{ : گزینه «۱»} \end{cases}$$

توجه: با انتخاب  $x=7$  و  $y=4$  نیز می‌توان نشان داد که گزینه «۳» نادرست است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۱۲۰ - گزینه «۱»

(رضا عباسی اصل)

شرط وجود جواب برای معادله  $n^3 - n = 5x + 10y$  در  $\mathbb{Z}$ ، آن است

$$\text{که } n^3 - n \equiv 5 \pmod{10} \text{ . بنابراین داریم:}$$

$$n^3 - n \equiv 0 \Rightarrow n(n-1)(n+1) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0 \Rightarrow n = 5k & (k \in \mathbb{Z}) \\ n-1 \equiv 0 \Rightarrow n \equiv 1 \Rightarrow n = 5k+1 & (k \in \mathbb{Z}) \\ n+1 \equiv 0 \Rightarrow n \equiv -1 \equiv 4 \Rightarrow n = 5k+4 & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

با توجه به این که برای هر یک از فرم‌های  $5k$ ،  $5k+1$  و  $5k+4$ ، ۲۰

مقدار در مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$  وجود دارد، پس به ازای ۶۰ مقدار

مختلف برای  $n$ ، معادله مورد نظر در  $\mathbb{Z}$  دارای جواب است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

فیزیک ۳

۱۲۱- گزینه «۱»

(مسام ندری)

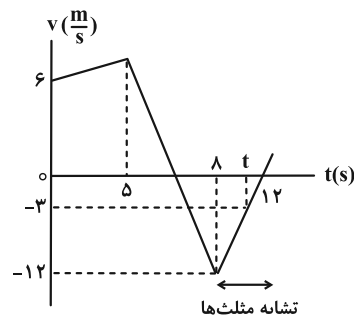
با توجه به نمودار مکان - زمان متحرک، سرعت آن در لحظات ۰/۵ s و ۱/۵ s صفر شده و متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است. در ضمن، در بازه زمانی  $t_1 = 0/5s$  تا  $t_2 = 1/5s$ ، جابه‌جایی متحرک در خلاف جهت محور x است، بنابراین جهت بردار سرعت متوسط نیز در خلاف جهت محور x است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۰)

۱۲۲- گزینه «۲»

(مسام ندری)

سومین بار در لحظه‌ای بین ۸ s و ۱۲ s تندی متحرک نصف تندی اولیه یعنی  $3 \frac{m}{s}$  می‌شود. برای محاسبه این زمان، داریم:



$$\Rightarrow \frac{12}{3} = \frac{12-8}{12-t} \Rightarrow t = 11s$$

$$\xrightarrow{t=0} v_0 = 6 \frac{m}{s}, \quad \xrightarrow{t=11s} v_{11} = -3 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{-3 - 6}{11 - 0} = \frac{-9}{11} \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{av}| = \frac{9}{11} \frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱۲۳- گزینه «۲»

(مسیم الهی)

چون حرکت با شتاب ثابت است، معادله مکان- زمان آن به صورت سهمی و  $x = at^2 + bt + c$  است:

$$x(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$x(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2$$

$$x(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -4$$

$$x = 2t^2 - 4t$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

(مشابه تمرین ۱۹ پایان فصل (۱) صفحه ۲۸ کتاب درسی)

۱۲۴- گزینه «۱»

(مسعود قره‌فانی)

ابتدا شتاب حرکت متحرک را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 48 = \frac{1}{2}a \times 6^2 + 2 \times 6 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

جابه‌جایی طی ثانیه هفتم برابر است با:

$$\Delta x_{(0 \text{ تا } 7)} - \Delta x_{(0 \text{ تا } 6)} = \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 7^2 + 2 \times 7 \right) - \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 6^2 + 2 \times 6 \right) = 15m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۱۲۵- گزینه «۳»

(مسیم الهی)

گلوله با سرعت اولیه صفر و شتاب ثابت  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  سقوط می‌کند. با

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{استفاده از رابطه حرکت سقوط آزاد داریم:}$$

$$h = \frac{1}{2} \times 10 \times (4)^2 = 80m \quad \text{با جایگذاری } t = 4s \text{ و } g = 10 \frac{m}{s^2}$$

پس ارتفاع ساختمان ۸۰ متر است.

برای محاسبه تندی در نیمه راه یعنی ارتفاع  $\left(\frac{h}{2}\right)$  از رابطه سرعت-

$$v^2 = 2g(\Delta y) \quad \text{جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم:}$$

$$\Delta y = \frac{h}{2} = \frac{80}{2} = 40m \quad \text{و داریم:}$$

$$v^2 = 2 \times 10 \times 40 = 800 \Rightarrow v = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

پس تندی گلوله در نیمه راه  $20\sqrt{2} \frac{m}{s}$  است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

(برگرفته از تمرین ۲۳ پایان فصل کتاب درسی)

۱۲۶- گزینه «۱»

(مسعود قره‌فانی)

ابتدا نیروی خالص را به دست می‌آوریم و سپس اندازه نیروی خالص و شتاب جسم را می‌یابیم:

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 1/2\vec{i} - 1/6\vec{j} \Rightarrow |\vec{F}_{net}| = \sqrt{(1/2)^2 + (-1/6)^2} = 2N$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(0/3)^2 + (-0/4)^2} = 0/5 \frac{m}{s^2}$$

حال با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$a = \frac{F_{net}}{m} \Rightarrow m = \frac{F_{net}}{a} = \frac{2}{0/5} = 4kg$$

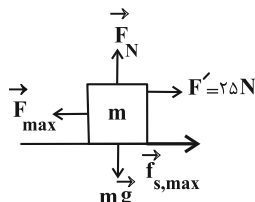
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)



$$F_N = mg = 7 \times 10 = 70 \text{ N}$$

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N = 0.3 \times 70 \Rightarrow f_{s, \max} = 21 \text{ N}$$

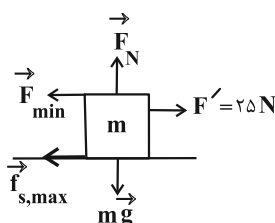
پیشینه نیروی  $\vec{F}$  زمانی است که جسم در آستانه حرکت به سمت چپ باشد:



$$F_{\max} - F' - f_{s, \max} = 0$$

$$\Rightarrow F_{\max} - 25 - 21 = 0 \Rightarrow F_{\max} = 46 \text{ N}$$

کمینه نیروی  $\vec{F}$  زمانی است که جسم در آستانه حرکت به سمت راست باشد.



$$F' - F_{\min} - f_{s, \max} = 0$$

$$\Rightarrow 25 - F_{\min} - 21 = 0 \Rightarrow F_{\min} = 4 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴ و ۳۷ تا ۳۸)

(حسین الهی)

۱۳- گزینه «۳»

چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، برآیند نیروهای وارد بر آن صفر

است. بنابراین نیروی فنر برابر با نیروی اصطکاک جنبشی است:

و نیروی عمودی سطح نیز برابر با  $mg + F_p$  می‌باشد:

$$F_N = mg + F_p = 4 \times 10 + 10 = 50 \text{ N}$$

همچنین نیروی اصطکاک جنبشی به صورت زیر است:

$$f_k = \mu_k F_N = 0.3 \times 50 = 15 \text{ N}$$

برای نیروی فنر نیز داریم:

$$x = \frac{F_e}{k} = \frac{15}{10} = 1.5 \text{ cm}$$

بنابراین افزایش طول فنر برابر است با:

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۶)

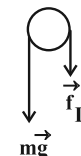
(برگرفته از آزمون نهایی فردا ۱۴۰۴ رشته ریاضی)

(بهنام رستمی)

۱۲۷- گزینه «۲»

شتاب گلوله هنگام بالا رفتن:  $f_D + mg = ma_1$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{f_D + mg}{m}$$



در نقطه اوج سرعت صفر است، در نتیجه نیروی مقاومت هوا در آن لحظه نیز

صفر است و بنابراین اندازه شتاب در آن لحظه  $g$  است.

اندازه شتاب گلوله هنگام بازگشت:  $mg - f_D = ma_p$

$$\Rightarrow a_p = \frac{mg - f_D}{m}$$



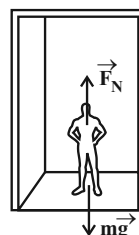
بنابراین:

$$a_1 > a_p > a_p$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

(علیرضا کونه)

۱۲۸- گزینه «۴»



با استفاده از قانون دوم نیوتون و در نظر

گرفتن جهت مثبت به طرف بالا، می‌توان

نوشت:

حالت اول: حرکت به صورت تندشونده با

شتاب  $\frac{2}{5} \frac{m}{s^2}$  به طرف بالا:

$$F_{N_1} - mg = ma \Rightarrow F_{N_1} = m(g + a) \quad (1)$$

حالت دوم: حرکت به صورت کندشونده با شتاب  $\frac{2}{5} \frac{m}{s^2}$  به طرف بالا:

$$F_{N_2} - mg = ma' \xrightarrow{a' = -a} F_{N_2} = m(g - a) \quad (2)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌های (۱) و (۲)، داریم:

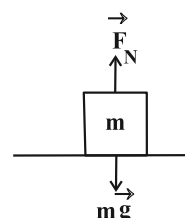
$$\frac{F_{N_1}}{F_{N_2}} = \frac{g + a}{g - a} = \frac{10 + 2}{10 - 2} \Rightarrow \frac{F_{N_1}}{F_{N_2}} = \frac{3}{2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۹)

(عبداله قم‌زاده)

۱۲۹- گزینه «۲»

ابتدا پیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را به دست می‌آوریم:



شیمی ۳

۱۳۱- گزینه ۲»

(مشمردن، مشمردن، مشمردن)

مولکول‌های صابون دارای دو بخش آب دوست و آب گریز (چربی دوست) هستند که می‌توانند هم در آب و هم در چربی‌ها حل شوند و محلول همگن ایجاد کنند. (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه‌های ۶ تا ۸) (برگرفته از متن کتاب)

۱۳۲- گزینه ۱»

(عمید زبئی)

چسب جزو مواد کلوئیدی است. کلوئیدها مخلوط‌هایی ناهمگن هستند. (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه ۷)

۱۳۳- گزینه ۴»

(مشمردن، مشمردن، مشمردن)

صابون همهٔ لکه‌ها را به یک اندازه از بین نمی‌برد، زیرا نوع پارچه، دما، نوع آب و نیز نوع و مقدار صابون بر روی قدرت پاک‌کنندگی آن تأثیر دارد. (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه‌های ۸، ۹ و ۱۰)

۱۳۴- گزینه ۳»

(آترین صبا)

دی نیتروژن پنتاکسید همانند کربن دی‌اکسید یک اسید آرنیوس به شمار می‌رود و منجر به افزایش غلظت یون هیدرونیوم در آب می‌شود. (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶) (برگرفته از خود را بیازماید صفحه ۱۶)

۱۳۵- گزینه ۳»

(مشمردن، مشمردن، مشمردن)

$100 \times \frac{\text{غلظت یون هیدرونیوم}}{\text{غلظت مولی اولیه}} = \text{درصد یونش}$   
 $15 = \frac{0.3 \times 10^{-3}}{[HCOOH]} \times 100 \Rightarrow [HCOOH] = \frac{0.3 \times 10^{-3}}{15} \times 100$   
 $\Rightarrow [HCOOH] = 0.002 \text{ mol.L}^{-1}$   
 (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱۳۶- گزینه ۲»

(فاضل قهرمانی فرد)

با توجه به رسانایی الکتریکی دو محلول در شرایط یکسان می‌توان نتیجه گرفت که درجه یونش HX از HY بیشتر است. بررسی گزینه‌های نادرست؛  
 گزینه ۱: «ممكن است اسید HX به‌طور كامل یونیده نشده باشد و نوعی اسید ضعیف باشد.  
 گزینه ۳: «ممكن است هر دو اسید ضعیف باشند ولی درجه یونش HX بزرگتر از HY باشد.  
 گزینه ۴: «چون درجهٔ یونش دو اسید برابر نیست، پس غلظت آنیون‌های ایجاد شده نیز برابر نخواهد بود.  
 (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۱۳۷- گزینه ۳»

(ساجر شیرینی)

$\text{HA} = \text{استیک اسید}$   
 $? \text{ molHA} = 12 \text{ gHA} \times \frac{1 \text{ molHA}}{60 \text{ gHA}} = 0.2 \text{ molHA}$   
 $M_{\text{HA}} = \frac{0.2 \text{ mol}}{0.25 \text{ L}} = 0.8 \text{ mol.L}^{-1}$   
 $K_a = \frac{[A^-][H^+]}{[HA]} \Rightarrow 2 \times 10^{-5} = \frac{[H^+]^2}{0.8}$   
 $\Rightarrow [H^+] = 4 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow [A^-] = 4 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$   
 $\text{مجموع غلظت یون‌ها} = 4 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} = 8 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$   
 $\text{مجموع مول یون‌ها} = 0.25 \text{ L} \times 8 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol}$   
 (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

۱۳۸- گزینه ۱»

(مجتبی عباری)

$\text{pH} = -\log[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-3/7} = 10^{-4} \times 10^{1/7}$   
 $= 2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$   
 $[H^+] = M \cdot \alpha \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = M \times \frac{2/5}{100} \Rightarrow M = 0.002 \text{ mol.L}^{-1}$   
 $2\text{HA} + \text{Ba(OH)}_2 \longrightarrow \text{BaA}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$   
 $? \text{ mLHA} = 0.02 \text{ L Ba(OH)}_2 \times \frac{1 \text{ mol Ba(OH)}_2}{1 \text{ L Ba(OH)}_2}$   
 $\times \frac{2 \text{ mol HA}}{1 \text{ mol Ba(OH)}_2} \times \frac{1 \text{ LHA}}{0.002 \text{ mol HA}} \times \frac{1000 \text{ mLHA}}{1 \text{ L HA}} = 500 \text{ mLHA}$   
 (شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تدرستی؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۵)

۱۳۹- گزینه ۲»

(امیر قاسمی)

اگر در واکنش گونه‌ای الکترون به دست آورد، کاهش یافته و نقش آن اکسنده است و اگر گونه‌ای الکترون از دست بدهد، اکسایش می‌یابد و نقش آن کاهنده است.  
 $\text{Al(s)} \rightarrow \text{Al}^{3+}(\text{aq}) + 3\text{e}^- \xrightarrow{\text{X}^2} 2\text{Al(s)} \rightarrow 2\text{Al}^{3+}(\text{aq}) + 6\text{e}^-$   
 (شیمی ۳- آسایش و رفاه در ساینهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۰، ۴۱ و ۴۲) (برگرفته از با هم بیندیشیم صفحه ۴۰)

۱۴۰- گزینه ۲»

(امیر قاسمی)

عبارت «الف» نادرست و عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.  
 الف و ب) بین فلز طلا و محلول  $\text{CuSO}_4(\text{aq})$  واکنشی رخ نمی‌دهد، بنابراین الکترونی هم رد و بدل نمی‌شود و رنگ آبی محلول تغییری نمی‌کند، ولی در واکنش هر مول  $\text{Zn(s)}$  با  $\text{CuSO}_4(\text{aq})$ ، ۲ مول الکترون مبادله خواهد شد.  
 پ) قوی‌ترین کاهنده، ضعیف‌ترین اکسنده را به جا خواهد گذاشت؛ پس  $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$  ضعیف‌ترین اکسنده است.  
 Zn: قوی‌ترین کاهنده در جدول صورت سؤال  
 (شیمی ۳- آسایش و رفاه در ساینهٔ شیمی؛ صفحه‌های ۴۲، ۴۳ و ۴۴)